

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 110 minutos

Fecha: 13 de mayo del 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] Dada la siguiente tabla de diferencias divididas:

x_i	$f(x_i)$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}, x_{i+3}]$
0	3	3	-1.3	
3	12	-3.5		
5	5			
7	10			

Si se utiliza un polinomio interpolante de Newton de **grado 2** para aproximar el valor de la función en $x = 4$ utilizando los tres primeros puntos (x_0, x_1, x_2) , entonces, bajo el **criterio del término siguiente**, el error estimado de dicha aproximación es $|E(4)| = 1.6$.

2. [2 pts] Considere el siguiente sistema no lineal:

$$f_1(x, y) = x^3 - 2y + 5 = 0, \quad f_2(x, y) = ye^{-x} - 3 = 0.$$

El método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales se obtiene al linealizar $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$ mediante la aproximación de Taylor de primer orden alrededor de $(x^{(k)}, y^{(k)})$. **Como consecuencia**, en cada iteración se debe resolver el siguiente sistema lineal para obtener la corrección $(\Delta x, \Delta y)$:

$$\begin{pmatrix} -2 & 3(x^{(k)})^2 \\ e^{-x^{(k)}} & -y^{(k)}e^{x^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (x^{(k)})^3 - 2y^{(k)} + 5 \\ y^{(k)}e^{-x^{(k)}} - 3 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] En un experimento de fisicoquímica se desea estimar la presión de vapor P de una sustancia a una temperatura absoluta T , utilizando una forma integrada de la ecuación de Clausius-Clapeyron. Suponiendo que la entalpía de vaporización se mantiene aproximadamente constante en el intervalo de temperaturas considerado, la presión de vapor puede obtenerse mediante la expresión:

$$P = P_0 \exp \left[-\frac{H}{R} \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) \right] \quad \left\{ \begin{array}{l} H = 40\,650 \text{ J/mol} \pm 1.2\% \\ T = 350 \text{ K} \pm 0.8 \text{ K} \\ P_0 = 101\,325 \text{ Pa} \\ T_0 = 373.15 \text{ K} \\ R = 8.314 \text{ J/(mol} \cdot \text{K)} \end{array} \right.$$

donde P_0 es la presión de vapor conocida a la temperatura de referencia T_0 , T es la temperatura absoluta de interés, H es la entalpía de vaporización de la sustancia y R es la constante universal de los gases.

- a) [2 pts] Identifique las incertidumbres absolutas de cada parámetro y deduzca una expresión analítica para la incertidumbre absoluta en la estimación de la presión de vapor P , desarrollando las derivadas correspondientes. **Nota:** No reemplazar aún valores numéricos.
- b) [1 pts] Halle el valor de la estimación de la presión de vapor P y su correspondiente incertidumbre relativa porcentual. **Nota:** No realizar cambio de unidades.

4. **[3 pts]** En el diseño de una pinza robótica, la posición de equilibrio x (en mm) del núcleo de un actuador solenoide se determina mediante la raíz de la función de carga:

$$f(x) = e^x + 10x - 12 = 0$$

Para asegurar la precisión del movimiento, se requiere alcanzar una tolerancia de error absoluto de $\text{Tol} = 0.15$.

- a) **[1 pts]** Utilizando el intervalo inicial $[a_0, b_0] = [0.5, 1.524]$, determine el número mínimo de iteraciones teóricas, denotado por n_{teo} , necesario para garantizar la tolerancia de 0.15.
- b) **[2 pts]** Aplique manualmente el método de bisección hasta que se satisfaga el criterio de parada $|f(c_i)| < 0.15$. Indique el número de iteraciones efectivamente realizadas, denotado por n_{real} .

APLICACIÓN

5. [10 pts] En un proceso de **lixiviación en columna**, una solución química (por ejemplo, ácido sulfúrico) se infiltra a través de un lecho de mineral triturado con el objetivo de extraer metales de interés. La concentración del reactivo $Q(x)$ satisface la ecuación diferencial con valores en frontera:

$$-\frac{d^2Q}{dx^2} + \frac{\lambda}{c}Q = \frac{x}{c} \quad ; \quad Q(0) = 10 \quad ; \quad Q(4) = 2$$

donde:

- $x \in [0, 4]$: variable espacial independiente [m].
- $Q(x)$: concentración del reactivo [kg/m³].
- $c = 2$: coeficiente de difusión [m²/s].
- $\lambda = 3$: constante de reacción [s⁻¹].

El intervalo $[0 ; 4]$ se divide en $n = 4$ subintervalos, es decir, $h = \frac{L}{n} = \frac{4}{4} = 1$, obteniendo los puntos discretos

$$x_0 = 0 \quad , \quad x_1 = 1 \quad , \quad x_2 = 2 \quad , \quad x_3 = 3 \quad , \quad x_4 = 4$$

Luego de discretizar la ecuación diferencial y formular el sistema de ecuaciones lineales respectivo, calcule en forma aproximada $Q(x_1)$, $Q(x_2)$ y $Q(x_3)$; para ello:

- a) [3 pts] Discretice la ecuación diferencial, considerando los parámetros y las condiciones iniciales dadas, escriba claramente la expresión

$$pQ_{i-1} + qQ_i + rQ_{i+1} = sx_i \quad i = 1, 2, 3$$

siendo p , q , r y s constantes enteras. Asimismo, formule el sistema de ecuaciones lineales

en su forma matricial $A\mathbf{Q} = b$, donde $\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$.

- b) [3 pts] Luego de mostrar las matrices D , L , U , T_{gs} y c_{gs} , halle el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss-Seidel. A partir de dicho valor, concluya claramente si el método iterativo converge o diverge.

- c) [4 pts] Realice 2 iteraciones del método de Gauss-Seidel, iniciando en el punto semilla $\mathbf{Q}^{(0)} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

1. Teoría de Errores

Incertidumbre (Propagación - Taylor 1er orden): Para una función $f(x_1, \dots, x_n)$ con incertidumbres absolutas Δx_i :

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

Cuantificación:

- Incertidumbre Relativa:

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta f}{|f|}$$

- Error Relativo Porcentual:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_r \cdot 100 \%$$

2. Ecuaciones No Lineales

Método de Bisección: Número mínimo de iteraciones para garantizar una tolerancia (Tol):

$$n \geq \frac{\ln \left(\frac{b-a}{2 \times \text{Tol}} \right)}{\ln 2}$$

Newton-Raphson (1 variable):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Sistemas No Lineales $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

- Matriz Jacobiana:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

- Sistema de Corrección y Actualización:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}$$

3. Interpolación de Newton

Diferencias Divididas:

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}$$

Polinomio Interpolante de grado n :

$$P_n(x) = f[x_0] + \sum_{i=1}^n f[x_0, \dots, x_i] \prod_{j=0}^{i-1} (x - x_j)$$

Criterio del Término Siguierte (Error):

$$|E(x)| \approx \left| f[x_0, \dots, x_{n+1}] \prod_{i=0}^n (x - x_i) \right|$$

4. Sistemas Lineales (SEL)

Descomposición $A = D - L - U$.

Método de Gauss-Seidel:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T_{gs} \mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}_{gs}$$

- Matriz de Iteración:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1}U$$

- Vector de Constantes:

$$\mathbf{c}_{gs} = (D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

Convergencia (Radio Espectral): Converge sí y solo sí:

$$\rho(T_{gs}) = \max |\lambda_i| < 1$$

5. Discretización de EDOs

Segunda Derivada (Diferencia Central):

$$\frac{d^2 Q}{dx^2} \approx \frac{Q_{i-1} - 2Q_i + Q_{i+1}}{\Delta x^2}$$

Inversa para matrices 3×3 (Tridiagonal):

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{b^2}{a^3} & \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$