

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 110 minutos

Fecha: 13 de mayo del 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

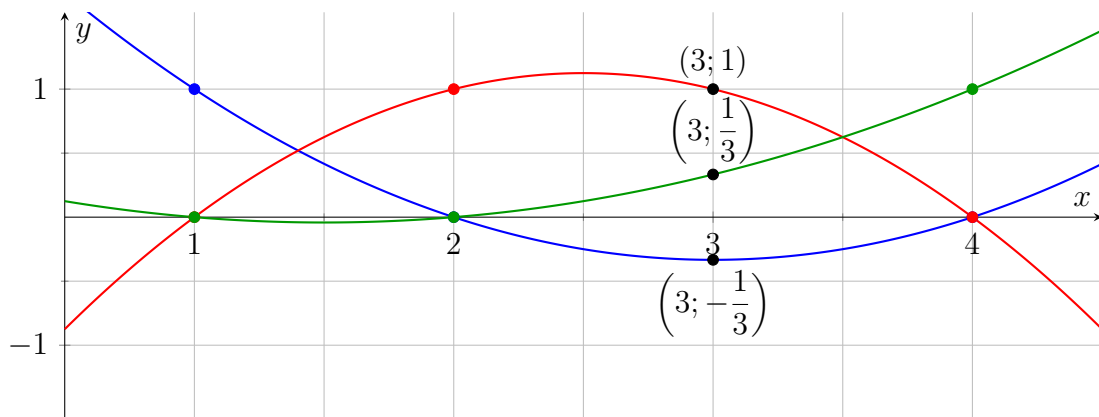
CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

- [2 pts] Dadas las gráficas de los polinomios básicos de Lagrange, el polinomio interpolante de grado 2 se puede escribir como

$$P(x) = 6L_0(x) + 2L_1(x) + 3L_2(x),$$

Por lo tanto, se cumple que el valor del polinomio interpolante en $x = 3$ es igual a 3.



2. [2 pts] Considere el siguiente sistema no lineal:

$$f_1(x, y) = x^3 - 2y + 5 = 0, \quad f_2(x, y) = ye^{-x} - 3 = 0.$$

El método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales se obtiene al linealizar $\mathbf{F}(x, y) = \mathbf{0}$ mediante la aproximación de Taylor de primer orden alrededor de $(x^{(k)}, y^{(k)})$. **Como consecuencia**, en cada iteración se debe resolver el siguiente sistema lineal para obtener la corrección $(\Delta x, \Delta y)$:

$$\begin{pmatrix} 3(x^{(k)})^2 & -2 \\ -y^{(k)}e^{x^{(k)}} & e^{-x^{(k)}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} (x^{(k)})^3 - 2y^{(k)} + 5 \\ y^{(k)}e^{-x^{(k)}} - 3 \end{pmatrix}. \quad \begin{pmatrix} x^{(k+1)} \\ y^{(k+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^{(k)} \\ y^{(k)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}.$$

PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] En un canal experimental, el caudal volumétrico Q se modela mediante la expresión

$$Q = k \frac{\sqrt{g} H^3 D^{5/2}}{L P^2} \quad [\text{m}^3/\text{s}],$$

donde $g = 9.8 \text{ m/s}^2$ es la aceleración de la gravedad y $k = 10^3$ es un factor de escala (ambos valores fijos). Además, H es la profundidad hidráulica (m), D es una longitud característica asociada a la sección (m), L es la longitud de referencia (m), P es el perímetro mojado equivalente (m). Considere los siguientes valores nominales:

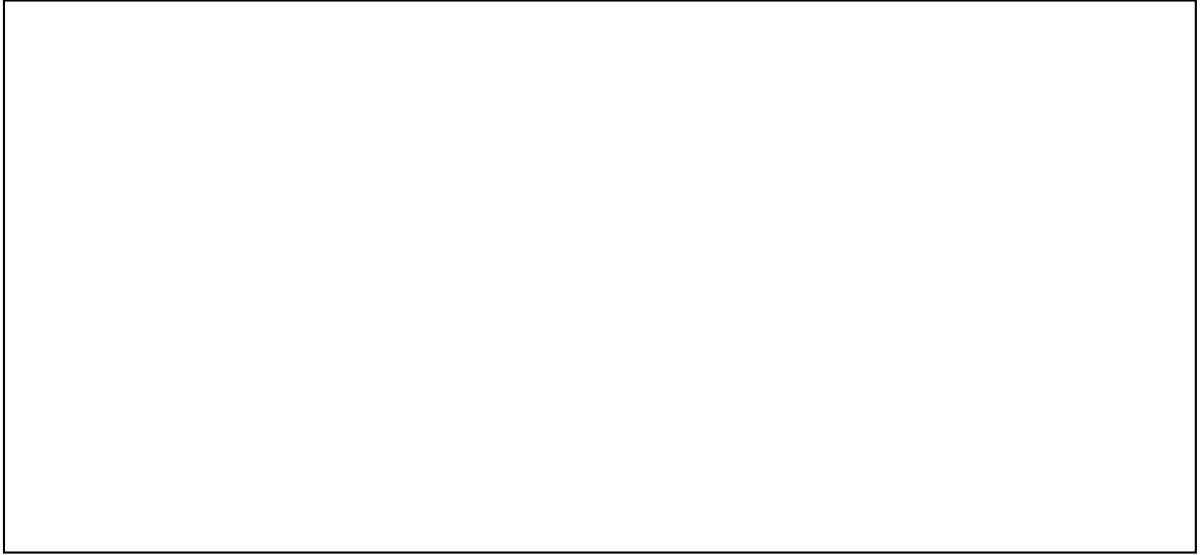
$$L = 16.0 \text{ m}, \quad P = 3.80 \text{ m}, \quad H = 1.20 \text{ m}, \quad D = 0.90 \text{ m}.$$

Las incertidumbres absolutas asociadas a cada una de las variables medidas son:

$$\Delta H = 0.02 \text{ m}, \quad \Delta D = 0.01 \text{ m}, \quad \Delta L = 0.20 \text{ m}, \quad \Delta P = 0.03 \text{ m}.$$

- (a) [1 pts] Calcule el valor nominal del caudal Q usando los datos proporcionados. Expresé su respuesta con 4 decimales.
- (b) [2 ptos] Estime el error absoluto máximo de Q , es decir,

$$\Delta Q \approx \left| \frac{\partial Q}{\partial H} \right| \Delta H + \left| \frac{\partial Q}{\partial D} \right| \Delta D + \left| \frac{\partial Q}{\partial L} \right| \Delta L + \left| \frac{\partial Q}{\partial P} \right| \Delta P.$$



4. **[3 pts]** Un satélite sigue una órbita elíptica. En el modelo de Kepler, la anomalía excéntrica x satisface la ecuación no lineal

$$x - e \sin x = \gamma,$$

donde e es la excentricidad de la órbita y γ es la anomalía media.

Considere: $e = 0.716$, $\gamma = 1.35$.

Se desea aproximar x resolviendo la ecuación de Kepler mediante el método de Newton.

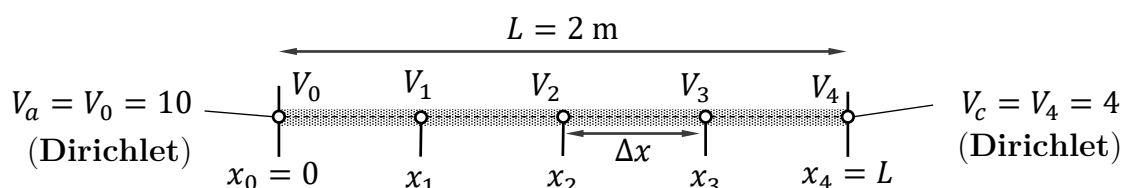
- (a) **[1 pts]** Defina la función no lineal $f(x)$ asociada al problema y derive explícitamente la fórmula iterativa del método de Newton para calcular x .
- (b) **[2 pts]** Tomando como aproximación inicial $x_0 = \gamma$, aplique el método de Newton hasta la segunda iteración. Presente una tabla con los valores de x_k , $f(x_k)$, $f'(x_k)$, x_{k+1} y el error relativo δ_ϵ aproximados a 4 decimales.



APLICACIÓN

5. [10 pts] Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria que modela la **distribución unidimensional en estado estacionario del potencial eléctrico en una celda de electroobtención** de longitud $L = 2$ m. El potencial eléctrico se distribuye entre el ánodo y el cátodo, existen pérdidas eléctricas distribuidas proporcionales al potencial y además se considera una fuente espacial variable asociada a efectos electroquímicos no uniformes. El potencial eléctrico se denota por $V(x)$ y tiene unidades de V.

$\frac{d^2 V}{dx^2} - \alpha V = -S_0 x$	$\alpha = 5 \quad (\text{m}^{-2}) \quad (\text{coef. de pérdidas eléctricas})$ $S_0 = 4 \quad \text{V}/(\text{m}^3) \quad (\text{coeficiente de fuente electroquímica espacial})$
--	--



El gráfico muestra el dominio discretizado mediante **5 nodos** (incluyendo los nodos frontera), igualmente espaciados y ordenados en el intervalo $0 \leq x \leq 2$ m. Además, se especifican condiciones de frontera tipo **Dirichlet** en ambos extremos del dominio: en la frontera izquierda se prescribe el potencial del ánodo y en la frontera derecha se prescribe el potencial del cátodo.

- a) [3 pts] Discretice la ecuación diferencial que describe el potencial eléctrico $V(x)$ utilizando los valores numéricos de los parámetros del modelo y el valor de Δx . Para ello, use la aproximación para la segunda derivada. Luego, utilizando las condiciones de frontera tipo Dirichlet, escriba el sistema de ecuaciones en forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{V} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{V} = [V_1 \ V_2 \ V_3]^T$.

- b) [4 ptos] Aplique 2 iteraciones del método de **Gauss–Seidel** para resolver el sistema, utilizando el punto semilla $\mathbf{V}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$. **Nota:** Debe mostrar las matrices D , L , U , así como T_{gs} y el vector c_{gs} .

- c) [3 ptos] **Halle el radio espectral** de la matriz de iteración de Gauss–Seidel del **item (b)**. En base al resultado de dicho análisis indique claramente si el método **converge o diverge**.

1. Teoría de Errores

Cuantificación:

- Error relativo:

$$\epsilon_a = \left| \frac{x_{k+1} - x_k}{x_{k+1}} \right|$$

Propagación (Taylor 1er orden):

$$\Delta f \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \Delta x_i$$

2. Ecuaciones No Lineales

Newton-Raphson (1 variable):

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

Sistemas No Lineales $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$:

- Matriz Jacobiana:

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

- Sistema de Corrección:

$$J(\mathbf{x}^{(k)}) \Delta \mathbf{x} = -\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(k)})$$

- Actualización:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \Delta \mathbf{x}$$

3. Sistemas Lineales (SEL)

Descomposición $A = D - L - U$.

Método de Gauss-Seidel:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = (D - L)^{-1} U \mathbf{x}^{(k)} + (D - L)^{-1} \mathbf{b}$$

Matrices de Iteración:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1} U$$

$$\mathbf{c}_{gs} = (D - L)^{-1} \mathbf{b}$$

Convergencia:

$$\rho(T_{gs}) = \max |\lambda_i| < 1$$

4. Diferencias Finitas

Segunda Derivada (Central):

$$\frac{d^2 V}{dx^2} \approx \frac{V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}}{(\Delta x)^2}$$

Paso de malla:

$$\Delta x = \frac{L}{n-1}$$

5. Interpolación Lagrange

Polinomio de grado n :

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

Polinomios Base (L_i):

$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Propiedad fundamental:

$$L_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

$$P(x_i) = y_i$$

Inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & b & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} & 0 \\ \frac{b^2}{a^3} & \frac{-b}{a^2} & \frac{1}{a} \end{bmatrix}$$