



Código de Alumno:

Duración: 110 minutos

Fecha: 30 de enero del 2025

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. **[2 pts]** Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz resultante de la discretización de un problema elíptico modelo. Sean T_J y T_{GS} las matrices de iteración de Jacobi y Gauss–Seidel, respectivamente. Se sabe que los los valores propios de T_J están dados por:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(i \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(j \frac{\pi}{3} \right) \right) \quad , \quad \text{para } i, j \in \{1, 2\}.$$

y que el radio espectral del método de Gauss–Seidel satisface $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J)^2$.

Se puede afirmar que:

"El método de Jacobi converge más rápido que el método de Gauss–Seidel."

2. **[2 pts]** Se presentan dos secuencias de bits que representan números reales en formato IEEE 754 precisión simple (A) y precisión doble (B):

- **A:** 1 10000011 1011000000000000000000
- **B:** 1 0001000011 1011000

Se afirma que:

"Las dos representaciones corresponden al mismo número real."

PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] En un experimento de geofísica se desea determinar la altura h de un punto respecto a un nivel de referencia utilizando un barómetro, suponiendo que la atmósfera se comporta como un gas ideal en condiciones isotérmicas. Bajo estas hipótesis, la altura puede obtenerse mediante la expresión:

$$h = \frac{RT}{g} \ln\left(\frac{P_0}{P}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 89\,500 \text{ Pa} \pm 75 \text{ Pa} \\ T = 288 \text{ K} \pm 0.5 \% \\ P_0 = 101\,325 \text{ Pa} \\ R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2 \end{array} \right.$$

donde P_0 es la presión atmosférica al nivel de referencia, P es la presión medida en el punto de interés, T es la temperatura absoluta del aire, R es la constante específica del aire y g es la aceleración de la gravedad.

- a. [2 pts] Identifique las incertidumbres absolutas de cada parámetro y deduzca una expresión analítica para la incertidumbre absoluta en la estimación de la altura h desarrollando las derivadas correspondientes. **Nota:** No reemplazar aún valores numéricos.

- b. **[1 pts]** Halle el valor de la estimación de la altura h y su correspondiente incertidumbre relativa. **Nota:** No realizar cambio de unidades.

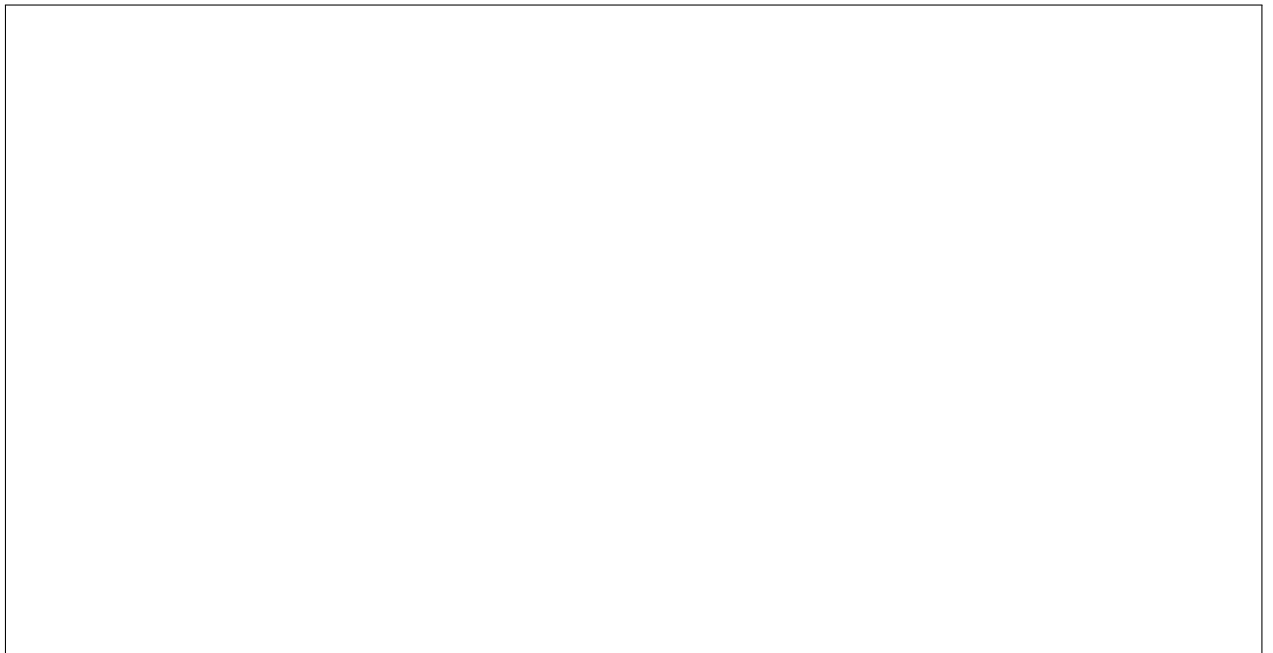
4. **[3 pts]** Sea un número $a > 0$, considere la ecuación no lineal $f(x) = x^2 - a = 0$. Realice lo siguiente:
- a. **[1.5 pts]** Aproxime $\sqrt{5}$ a partir de la ecuación no lineal mediante el método de Newton-Raphson con un punto semilla $x_0 = 2$ y una tolerancia de 0.01.



- b. **[1.5 pts]** Sea $a = 2$, muestre que la fórmula de iteración de Newton-Raphson

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

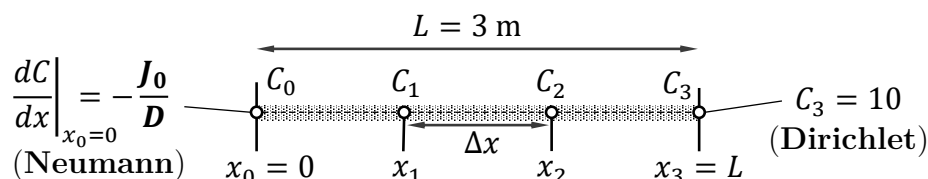
define un esquema de punto fijo $x = g(x)$ que cumple la condición de contracción en el intervalo $[1, 2]$.



APLICACIÓN

5. [10 pts] Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria que modela el **transporte unidimensional en estado estacionario de un contaminante en un medio** de longitud $L = 3$ m. El contaminante se difunde en el medio, se degrada biológicamente a una tasa proporcional a su concentración y existe además una fuente volumétrica uniforme en todo el dominio. La concentración del contaminante se denota por $C(x)$ y tiene unidades de kg/m^3 .

$D \frac{d^2 C}{dx^2} - k_d C = -S$	$D = 2$	m^2/s	(coeficiente de difusión)
	$k_d = 1$	s^{-1}	(constante de decaimiento biológico)
	$S = 5$	$\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$	(fuente volumétrica uniforme)
	$J_0 = 4$	$\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$	(flujo másico impuesto)



El gráfico muestra el dominio discretizado mediante **4 nodos** (incluyendo los nodos frontera), igualmente espaciados y ordenados en el intervalo $0 \leq x \leq 3$ m. Además, se especifica una **frontera izquierda tipo Neumann** (flujo másico prescrito que ingresa al dominio) y una **frontera derecha tipo Dirichlet** (reservorio con concentración constante).

- a) [4 pts] Discretice la ecuación diferencial que describe la concentración $C(x)$ utilizando los valores numéricos de los parámetros del modelo y el valor de Δx . Para ello, use las siguientes aproximaciones para las derivadas:

$$\left. \frac{d^2 C}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{nodos internos}), \quad \left. \frac{dC}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{C_1 - C_0}{\Delta x} \quad (\text{frontera izquierda})$$

Luego, utilizando la condición de frontera para eliminar C_0 , escriba el sistema de ecuaciones en forma matricial $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2]^T$.

- b) [4 ptos] Suponiendo que el sistema lineal obtenido en el ítem anterior queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -24 \end{bmatrix}$$

aplique el método de **Gauss–Seidel** para resolver el sistema, utilizando el punto semilla $\mathbf{C}^{(0)} = \begin{bmatrix} 5 & 7 \end{bmatrix}^T$ y una tolerancia de 0.01. **Nota:** Use la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$) y el error relativo como criterio de convergencia.

- c) [2 ptos] **Halle el radio espectral** de la matriz de iteración de Gauss-Seidel del **item (b)**. En base al resultado de dicho análisis indique claramente si el método **converge** o **diverge**.

Formulario:

1. **Teoría de errores (Varías variables):** Sean las medidas $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ con incertidumbres $\Delta \tilde{x}_i$. Para $q = f(x_1, \dots, x_n)$, la incertidumbre estimada es:

$$\Delta q \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \cdot \Delta \tilde{x}_i$$

2. **Aritmética del punto flotante:** El punto flotante de $x \neq 0$, en el estándar IEEE 754, sigue la fórmula:

$$fl(x) = \pm (1.d_1d_2 \dots d_p)_2 \times 2^{E_i - \text{BIAS}}$$

donde $d_1d_2 \dots d_p$ es la mantisa, E_i es el exponente interno, BIAS es el sesgo (127 para precisión simple y 1023 para precisión doble).

3. **Método de Newton - Raphson:** Usar:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

considerando $f'(x_i) \neq 0$ y criterio de parada al **error relativo**.

4. **Convergencia del método del punto fijo:** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b \rangle$ que satisface:

- Para cualquier punto x en $[a, b]$, se tiene que $g(x) \in [a, b]$ (**condición de existencia**).
- Se cumple $|g'(x)| < 1$ para cualquier $x \in \langle a, b \rangle$ (**condición de contracción**).

Entonces existe un único punto $p \in \langle a, b \rangle$ tal que $g(p) = p$. Además, si $x^{(0)}$ es algún punto del intervalo $[a, b]$, y la sucesión $\{x^{(k)}\}$ se construye de manera recursiva

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

entonces, la sucesión $\{x^{(k)}\}$ converge al punto fijo p de la función g .

5. **Métodos Iterativos ($Ax = b$):** Sea la

descomposición $A = D - L - U$.

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & \dots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

6. Esquema iterativo de Gauss - Seidel (forma matricial):

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T_{gs} \mathbf{x}^{(k)} + c_{gs}$$

donde $T_{gs} = (D - L)^{-1}U$, es la **matriz de iteración de Gauss-Seidel** y $c_{gs} = (D - L)^{-1}b$ es el **vector de Gauss-Seidel**.

7. Esquema iterativo de Gauss - Seidel (forma algebraica):

$$x_1^{(k+1)} = \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{(k)} - \dots - a_{1n}x_n^{(k)}),$$

$$x_2^{(k+1)} = \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{2n}x_n^{(k)}),$$

$\vdots$

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{(k+1)} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{(k+1)}).$$

8. Convergencia (Radio Espectral): El método converge si y solo si $\rho(T) < 1$, donde:

$$\rho(T) = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } T\}$$

9. **Norma infinito de un vector y error relativo:**

$$\|\mathbf{x}\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|, \quad \delta_r^{(k+1)} = \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|}$$