

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. **[2 pts]** Sea $A \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ la matriz resultante de la discretización de un problema elíptico modelo. Sean T_J y T_{GS} las matrices de iteración de Jacobi y Gauss–Seidel, respectivamente. Se sabe que los valores propios de T_J están dados por:

$$\mu_{ij} = \frac{1}{2} \left(\cos \left(i \frac{\pi}{3} \right) + \cos \left(j \frac{\pi}{3} \right) \right) \quad , \quad \text{para } i, j \in \{1, 2\}.$$

y que el radio espectral del método de Gauss–Seidel satisface $\rho(T_{GS}) = \rho(T_J)^2$.

Se puede afirmar que:

"El método de Jacobi converge más rápido que el método de Gauss-Seidel."

Solución

Para la matriz de iteración de Jacobi T_J obtenemos sus 4 autovalores evaluando en la fórmula dada:

- $\underline{i = 1, j = 1} \longrightarrow \mu_{11} = \frac{1}{2}(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)) = 0.5$
- $\underline{i = 1, j = 2} \longrightarrow \mu_{12} = \frac{1}{2}(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = 0$
- $\underline{i = 2, j = 1} \longrightarrow \mu_{21} = \frac{1}{2}(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)) = 0$
- $\underline{i = 2, j = 2} \longrightarrow \mu_{22} = \frac{1}{2}(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)) = -0.5$

Por lo tanto, el radio espectral del método de Jacobi es:

$$\rho(T_J) = \max \{ | -0.5 |, | 0 |, | 0.5 | \} = 0.5$$

Del enunciado, obtenemos el radio espectral del método de Gauss–Seidel:

$$\rho(T_{GS}) = \rho(T_J)^2 = (0.5)^2 = \mathbf{0.25} < 1.$$

En consecuencia, el método de Gauss–Seidel es convergente. Además, como su radio espectral es menor que el del método de Jacobi ($\rho(T_{GS}) = 0.25 < \rho(T_J) = 0.5$), se concluye que **Gauss–Seidel converge más rápidamente**.

Por tanto, la afirmación del enunciado es **FALSA**.

2. [2 pts] Se presentan dos secuencias de bits que representan números reales en formato IEEE 754 precisión simple (A) y precisión doble (B):

[illegible]

Se afirma que:

"Las dos representaciones corresponden al mismo número real."

Solución

Ambas secuencias representan números reales normalizados en formato IEEE-754, cuyo valor viene dado por:

$$x = (-1)^s (1.f) 2^{e-\text{BIAS}}.$$

Note que el signo y la mantisa coinciden por lo que analizamos el exponente:

Caso A (precisión simple):

$$e_{\text{int}} = 10000011_2 = 131, \quad \text{BIAS} = 127 \quad \longrightarrow E_{\text{ext}} = e_{\text{int}} - \text{BIAS} = 131 - 127 = 4$$

Caso B (precisión doble):

$$e_{\text{int}} = 00010000011_2 = 131, \quad \text{BIAS} = 1023 \quad \longrightarrow E_{\text{ext}} = e_{\text{int}} - \text{BIAS} = 131 - 1023 = -892$$

Los exponentes externos son distintos, por lo que las dos secuencias de bits *no* representan el mismo número real.

Por tanto, la afirmación del enunciado es **FALSA**.

3. [3 pts] En un experimento de geofísica se desea determinar la altura h de un punto respecto a un nivel de referencia utilizando un barómetro, suponiendo que la atmósfera se comporta como un gas ideal en condiciones isotérmicas. Bajo estas hipótesis, la altura puede obtenerse mediante la expresión:

$$h = \frac{RT}{g} \ln\left(\frac{P_0}{P}\right) \quad \left\{ \begin{array}{l} P = 89\,500 \text{ Pa} \pm 75 \text{ Pa} \\ T = 288 \text{ K} \pm 0.5 \% \\ P_0 = 101\,325 \text{ Pa} \\ R = 287 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K}) \\ g = 9.81 \text{ m/s}^2 \end{array} \right.$$

donde P_0 es la presión atmosférica al nivel de referencia, P es la presión medida en el punto de interés, T es la temperatura absoluta del aire, R es la constante específica del aire y g es la aceleración de la gravedad.

- a. [2 pts] Identifique las incertidumbres absolutas de cada parámetro y deduzca una expresión analítica para la incertidumbre absoluta en la estimación de la altura h desarrollando las derivadas correspondientes. **Nota:** No reemplazar aún valores numéricos.

Solución

Identificamos las incertidumbres absolutas:

$$\Delta P = 75 \text{ Pa}$$

$$\Delta T = 0.5 \% (288 \text{ K}) = 1.44 \text{ K}$$

Luego, como:

$$h = h(T, P) = \frac{RT}{g} \ln\left(\frac{P_0}{P}\right)$$

Entonces, la incertidumbre absoluta de h se aproxima mediante el diferencial total:

$$\Delta h \approx \left| \frac{\partial h}{\partial T} \right| \Delta T + \left| \frac{\partial h}{\partial P} \right| \Delta P$$

Calculamos las derivadas parciales:

- Respecto a T :

$$\frac{\partial h}{\partial T} = \frac{R}{g} \ln \left(\frac{P_0}{P} \right)$$

- Respecto a P :

$$\frac{\partial h}{\partial P} = \frac{RT}{g} \cdot \frac{\partial}{\partial P} (\ln P_0 - \ln P) = \frac{RT}{g} \left(0 - \frac{1}{P} \right) = -\frac{RT}{gP}$$

Expresión final:

$$\Delta h \approx \left| \frac{R}{g} \ln \left(\frac{P_0}{P} \right) \right| \Delta T + \left| \frac{RT}{gP} \right| \Delta P$$

- b. [1 pts] Halle el valor de la estimación de la altura h y su correspondiente incertidumbre relativa. **Nota:** No realizar cambio de unidades.

Solución

Usando los datos previos:

$$\begin{aligned} P &= 89500 \text{ Pa} & P_0 &= 101325 \text{ Pa} & T &= 288 \text{ K} & R &= 287 \text{ J/(kg} \cdot \text{K)} \\ g &= 9.81 \text{ m/s}^2 & \Delta P &= 75 \text{ Pa} & \Delta T &= 1.44 \text{ K} \end{aligned}$$

Se calcula el valor nominal de h :

$$h = \frac{287 \cdot 288}{9.81} \ln \left(\frac{101325}{89500} \right) \approx 8424.46 \cdot 0.1241 = \mathbf{1045.5819 \text{ m}}$$

Luego, evaluamos las derivadas absolutas:

$$\left| \frac{\partial h}{\partial T} \right| = \left| \frac{1045.58}{288} \right| \approx 3.6305 \quad , \quad \left| \frac{\partial h}{\partial P} \right| = \left| \frac{-RT}{gP} \right| = \left| \frac{-287 \cdot 288}{9.81 \cdot 89500} \right| \approx 0.0941$$

Obtenemos la incertidumbre total Δh :

$$\Delta h \approx (3.6305)(1.44) + (0.0941)(75) = 5.228 + 7.058 = \mathbf{12.286 \text{ m}}$$

Finalmente, obtenemos su incertidumbre relativa porcentual:

$$\epsilon_r = \frac{12.286}{1045.5819} \approx 0.0118 = \mathbf{1.18 \%}$$

4. [3 pts] Sea un número $a > 0$, considere la ecuación no lineal $f(x) = x^2 - a = 0$. Realice lo siguiente:
- a. [1.5 pts] Aproxime $\sqrt{5}$ a partir de la ecuación no lineal mediante el método de Newton-Raphson con un punto semilla $x_0 = 2$ y una tolerancia de 0.01.

Solución

Se solicita el valor de $x = \sqrt{5}$ que se puede escribir como $x^2 - 5 = 0$. Luego definimos $f(x) = x^2 - 5$, siendo $f'(x) = 2x$.

Aproximaremos el valor de x usando la fórmula de iteración de Newton-Raphson:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 5}{2x_k} = \frac{2x_k^2 - x_k^2 + 5}{2x_k} = \frac{x_k^2 + 5}{2x_k}$$

Llevamos a cabo las iteraciones usando un valor semilla $x_0 = 2$ y una tolerancia = 0.01:

- Para $k=0$:

$$x_1 = \frac{x_0^2 + 5}{2x_0} = \frac{2^2 + 5}{2(2)} = \frac{9}{4} = 2.25$$

Error relativo: $\delta_r^{(1)} = \frac{|(2.25 - 2)|}{|2.25|} = 0.111 > 0.01$.

- Para $k=1$:

$$x_2 = \frac{x_1^2 + 5}{2x_1} = \frac{2.25^2 + 5}{2(2.25)} \approx \mathbf{2.2361}$$

Error relativo: $\delta_r^{(2)} = \frac{|(2.2361 - 2.25)|}{|2.2361|} \approx 0.0062 < 0.01$ (se cumple)

Como el error relativo es menor a la tolerancia entonces el proceso se detiene en la segunda iteración, siendo la aproximación resultante **2.2361**.

- b. [1.5 pts] Sea $a = 2$, muestre que la fórmula de iteración de Newton-Raphson

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

define un esquema de punto fijo $x = g(x)$ que cumple la condición de contracción en el intervalo $[1, 2]$.

Solución

Para $a = 2$, el método de Newton-Raphson tiene como fórmula de iteraciones:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

Esta fórmula determina un esquema de punto fijo $x = g(x)$ donde:

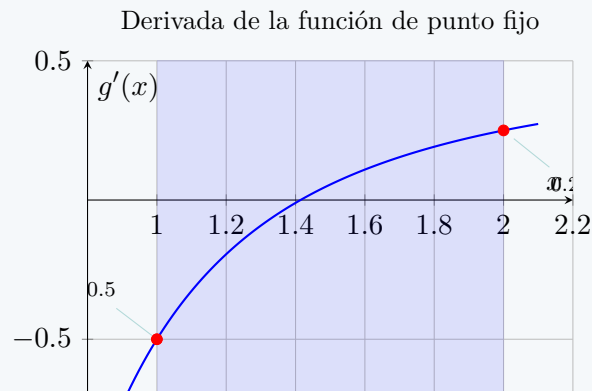
$$g(x) = x - \frac{x^2 - 2}{2x} = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$$

Luego, debemos verificar si $|g'(x)| < 1$ en el intervalo $I = [1, 2]$. Para ello calculamos la derivada:

$$g'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x^2}$$

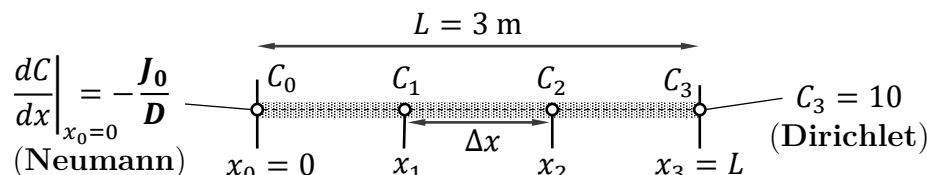
Como $g''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$ para todo $x \in [1, 2]$, la derivada $g'(x)$ es una función estrictamente creciente. Dado que $-0.5 \leq g'(x) \leq 0.25$, entonces $|g'(x)| \leq 0.5 < 1$. Se concluye que $g(x) = \frac{x}{2} + \frac{1}{x}$ cumple con la condición de contracción en $[1, 2]$.

La siguiente gráfica muestra cómo $g'(x)$ se mantiene dentro de los límites de convergencia ($|g'(x)| < 1$):



5. [10 pts] Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria que modela el **transporte unidimensional en estado estacionario de un contaminante en un medio** de longitud $L = 3$ m. El contaminante se difunde en el medio, se degrada biológicamente a una tasa proporcional a su concentración y existe además una fuente volumétrica uniforme en todo el dominio. La concentración del contaminante se denota por $C(x)$ y tiene unidades de kg/m^3 .

$D \frac{d^2 C}{dx^2} - k_d C = -S$	$D = 2$	m^2/s	(coeficiente de difusión)
	$k_d = 1$	s^{-1}	(constante de decaimiento biológico)
	$S = 5$	$\text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$	(fuente volumétrica uniforme)
	$J_0 = 4$	$\text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$	(flujo másico impuesto)



El gráfico muestra el dominio discretizado mediante **4 nodos** (incluyendo los nodos frontera), igualmente espaciados y ordenados en el intervalo $0 \leq x \leq 3$ m. Además, se especifica una **frontera izquierda tipo Neumann** (flujo másico prescrito que ingresa al dominio) y una **frontera derecha tipo Dirichlet** (reservorio con concentración constante).

- a) [4 pts] Discretice la ecuación diferencial que describe la concentración $C(x)$ utilizando los valores numéricos de los parámetros del modelo y el valor de Δx . Para ello, use las siguientes aproximaciones para las derivadas:

$$\left. \frac{d^2 C}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad (\text{nodos internos}), \quad \left. \frac{dC}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{C_1 - C_0}{\Delta x} \quad (\text{frontera izquierda})$$

Luego, utilizando la condición de frontera para eliminar C_0 , escriba el sistema de ecuaciones en forma matricial $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{C} = [C_1 \ C_2]^T$.

Solución

Los datos del enunciado para el transporte de contaminantes son:

- Dominio: $x \in [0, 3]$ m con $N = 4$ nodos.
- Paso de malla: $\Delta x = \frac{L}{N-1} = \frac{3}{3} = 1$ m.
- Coordenadas de los nodos: $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$.
- Parámetros físicos: Difusión $D = 2 \text{ m}^2/\text{s}$, Degradación $k_d = 1 \text{ s}^{-1}$, Fuente $S = 5 \text{ kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$.

La ecuación de balance para un contaminante en estado estacionario es:

$$D \frac{d^2 C}{dx^2} - k_d C = -S$$

Sustituyendo la aproximación de diferencias finitas en un nodo interno i :

$$D \left(\frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{(\Delta x)^2} \right) - k_d C_i = -S$$

Reemplazando los valores numéricos ($D = 2, \Delta x = 1, k_d = 1, S = 5$):

$$2 \left(\frac{C_{i-1} - 2C_i + C_{i+1}}{1^2} \right) - (1)C_i = -5$$

$$2C_{i-1} - 4C_i + 2C_{i+1} - C_i = -5$$

Obtenemos la ecuación discretizada para los nodos internos:

$$2C_{i-1} - 5C_i + 2C_{i+1} = -5 \quad (1)$$

Además, se conoce que:

- **Frontera Derecha (Dirichlet en $x_3 = 3$):** Se especifica una concentración constante, por lo tanto: $C_3 = 10$.
- **Frontera Izquierda (Neumann en $x_0 = 0$):** El $J_0 = -D \frac{dC}{dx} = 4$. Usando la aproximación de la derivada hacia adelante:

$$\left. \frac{dC}{dx} \right|_{x_0} \approx \frac{C_1 - C_0}{\Delta x} = -\frac{J_0}{D} \implies \frac{C_1 - C_0}{1} = -\frac{4}{2} = -2$$

Despejando el nodo de frontera C_0 en términos del nodo interno C_1 :

$$C_0 = C_1 + 2 \quad (2)$$

Sustituimos las condiciones anteriores en la ecuación (1) y ordenamos el sistema de ecuaciones lineales:

- **Para el Nodo 1 ($i = 1$):**

$$2C_0 - 5C_1 + 2C_2 = -5$$

Sustituyendo (2): $2(C_1 + 2) - 5C_1 + 2C_2 = -5$

$$2C_1 + 4 - 5C_1 + 2C_2 = -5 \implies -3C_1 + 2C_2 = -9$$

- **Para el Nodo 2 ($i = 2$):**

$$2C_1 - 5C_2 + 2C_3 = -5$$

Sustituyendo $C_3 = 10$: $2C_1 - 5C_2 + 2(10) = -5$

$$2C_1 - 5C_2 + 20 = -5 \implies 2C_1 - 5C_2 = -25$$

Finalmente, ordenamos matricialmente para obtener el sistema $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -25 \end{bmatrix}$$

b) [4 pts] Suponiendo que el sistema lineal obtenido en el ítem anterior queda expresado como:

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -24 \end{bmatrix}$$

aplique el método de **Gauss-Seidel** para resolver el sistema, utilizando el punto semilla $\mathbf{C}^{(0)} = [5 \ 7]^T$ y una tolerancia de 0.01. **Nota:** Use la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$) y el error relativo como criterio de convergencia.

Solución

A partir del sistema lineal propuesto en el ítem (b):

$$\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ -24 \end{bmatrix}$$

La matriz del sistema se puede descomponer en $A = D - L - U$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow D = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

La matriz de iteraciones de Gauss-Seidel es:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 2/15 \end{bmatrix}$$

El vector de iteraciones de Gauss-Seidel es:

$$c_{gs} = (D - L)^{-1}b = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -9 \\ -24 \end{bmatrix} \rightarrow c_{gs} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Luego, ejecutamos las iteraciones:

Para $k=0$:

$$\mathbf{C}^{(1)} = T_{gs}\mathbf{C}^{(0)} + c_{gs} = T_{gs} \begin{bmatrix} 5 \\ 7 \end{bmatrix} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 5.3331 \\ 6.9331 \end{bmatrix}$$

$$\text{Error relativo: } \delta_r^{(1)} = \frac{\|\mathbf{C}^{(1)} - \mathbf{C}^{(0)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{C}^{(1)}\|_{\infty}} = 0.0480 > 0.01$$

Para $k=1$:

$$\mathbf{C}^{(2)} = T_{gs}\mathbf{C}^{(1)} + c_{gs} = T_{gs} \begin{bmatrix} 5.3331 \\ 6.9331 \end{bmatrix} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 5.3108 \\ 6.9242 \end{bmatrix}$$

$$\text{Error relativo: } \delta_r^{(2)} = \frac{\|\mathbf{C}^{(2)} - \mathbf{C}^{(1)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{C}^{(2)}\|_{\infty}} = 0.0032 < 0.01 \text{ (se cumple).}$$

Como el error relativo es menor a la tolerancia entonces el proceso se detiene en la segunda iteración, siendo la aproximación resultante $\mathbf{C} \approx \begin{bmatrix} 5.3108 \\ 6.9242 \end{bmatrix}$.

- c) [2 pts] **Halle el radio espectral** de la matriz de iteración de Gauss-Seidel del ítem (b). En base al resultado de dicho análisis indique claramente si el método **converge o diverge**.

Solución

Del ítem anterior, la matriz de iteraciones de Gauss-Seidel es:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 2/15 \end{bmatrix}$$

Como es una matriz triangular superior, los valores propios son los elementos de la diagonal.

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = \frac{2}{15} \approx 0.1333$$

Luego, el radio espectral de T_{gs} es: $\rho(T_{gs}) = \max\{0, 0.1333\} = 0.1333$.

Finalmente, dado que $\rho(T_{gs}) < 1$, el método de Gauss-Seidel **converge**.