

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Con aritmética de **3 cifras significativas** y redondeo tras cada operación elemental, para

$$f(x) = x^3 - 5.5x^2 + 2.1x \quad \text{y} \quad x = 4.5,$$

se obtiene $f(4.5) \approx -11.2$.

2. [2 ptos] Sea $\tan^{-1}(x) - 1 = 0$, la convergencia por el método de bisección es más rápida que usando Newton con una precisión de 3 decimales. Para biseccion usar $I = [1, 2]$ y para newton usar $x_o = 1$

PROCEDIMENTAL

3. [4 ptos] Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (x, y)$. Considerar el sistema

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + \sin(y) - 3 = 0 \\ f_2(x, y) = e^y + xy - 1 = 0 \end{cases}$$

con semilla inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (1, 0)$.

- a. [1 pto] Escriba la iteración de Newton y el Jacobiano, ponga explícitamente la inversa del Jacobiano.

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J_f(\mathbf{x}^{(k)})^{-1} f(\mathbf{x}^{(k)})$$

- b. [3 ptos] Halle las 3 primeras iteraciones paso a paso. Muestre sus resultados en una tabla donde se muestre la aproximación y el valor del Jacobiano en cada iteración (Use 4 decimales exactamente en cada iteración).

4. [4 ptos] Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 12x_1 - 2x_2 + x_3 = 60 \\ -3x_1 + 15x_2 - 2x_3 = 120 \\ 2x_1 - x_2 + 18x_3 = 240 \end{cases}$$

Sea la aproximación inicial $\mathbf{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}) = (20, 5, 30)$. Calcule dos iteraciones del de Gaus-Seidel y muestre los resultados en forma tabular.

Use

$$x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$$

APLICACIONES

Propagación de Errores en un Modelo Geotécnico Un ingeniero geotecnista evalúa la estabilidad de un talud mediante el Factor de Seguridad (FS), cuya fórmula es:

$$FS(c, \gamma, H, \beta, \phi) = \frac{c}{\gamma H \sin(\beta) \cos(\beta)} + \frac{\tan(\phi)}{\tan(\beta)}$$

Los parámetros medidos en campo y sus incertidumbres asociadas son los siguientes:

Parámetro	Símbolo	Valor Medido	Error Absoluto (Δ)
Cohesión	c	25 kPa	± 1.5 kPa
Peso Específico	γ	18 kN/m ³	± 0.5 kN/m ³
Altura del Talud	H	10 m	± 0.2 m
Ángulo del Talud	β	30°	$\pm 1.0^\circ$
Ángulo de Fricción	ϕ	35°	$\pm 1.2^\circ$

a. [1.5 pts] Calcule el valor nominal del Factor de Seguridad (FS) utilizando los valores medidos. Según este resultado, ¿se consideraría estable el talud (criterio: FS > 1.5)?

b. [2.5 pts] Halle las cinco derivadas parciales de la función FS con respecto a cada variable: $\frac{\partial FS}{\partial c}$, $\frac{\partial FS}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial FS}{\partial H}$, $\frac{\partial FS}{\partial \beta}$, $\frac{\partial FS}{\partial \phi}$.

c. [2 ptos] Utilizando la aproximación de primer orden de la serie de Taylor, estime el error absoluto total (ΔFS) en el Factor de Seguridad evaluando las derivadas en el punto nominal.

d. [2 ptos] Exprese el resultado final en el formato $FS = FS_{\text{nominal}} \pm \Delta FS$. Considerando el rango de incertidumbre, ¿puede el ingeniero garantizar con certeza que el talud es estable? Justifique su respuesta.

Formulario:

1. **Teoría de errores:** Sean las medidas $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n$ con incertidumbres $\Delta\tilde{x}_1, \Delta\tilde{x}_2, \dots, \Delta\tilde{x}_n$ usadas para calcular $q = f(x_1, \dots, x_n)$. La incertidumbre $\Delta\tilde{q}$ se puede estimar como:

$$\Delta f(\tilde{\mathbf{x}}) \approx \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tilde{\mathbf{x}}) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_i$$

2. **Convergencia local del punto fijo (sistemas):** Sea $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función iterativa tal que $x = G(x)$. Si G es diferenciable en una vecindad de x^* y se cumple

$$\|J_G(x^*)\| < 1$$

donde J_G es la matriz jacobiana de G , entonces el método $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ converge localmente a x^* .

3. **Métodos Iterativos:** Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

El esquema iterativo es

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = T\mathbf{x}^{(k)} + \mathbf{c}$$

- Esquema iterativo de Jacobi:

$$T_j = D^{-1}(L + U), \quad \mathbf{c}_j = D^{-1}\mathbf{b}$$

- Esquema iterativo de Gauss-Seidel:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1}U, \quad \mathbf{c}_{gs} = (D - L)^{-1}\mathbf{b}$$

- Matriz diagonal estrictamente dominante (DED): La matriz A es DED por filas si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \text{para cada fila } i = 1, \dots, n$$

- Radio espectral de T ($\rho(T)$):

$$\rho(T) = \text{Max}\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } T\}$$

4. **Normas matriciales:** Para matrices A de orden $m \times n$ se tiene

$$\|A\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \quad (\text{Norma infinito o por filas})$$