

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, **trabaje con 4 decimales**. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, **use únicamente los espacios provistos** y no desglose hoja alguna. Solo el contenido de este cuadernillo será calificado.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] Se sabe que para el conjunto de puntos

i	0	1	2	3
x_i	-2	0	-1	3
y_i	-1	-2	1	2

existe un único polinomio interpolante de grado 3 a lo más. Sean $L(x)$ y $N(x)$ las formas de Lagrange y Newton para dicho polinomio interpolante, además sean $L_0(x)$, $L_1(x)$, $L_2(x)$ y $L_3(x)$ los polinomios básicos de Lagrange entonces se puede afirmar:

$$L_0(0) + L_1(-1)L_3(3) + L(0) + N(-1) = 2y_2$$

2. [2 ptos] Para el sistema no lineal

$$\begin{cases} \sin x + y^2 = 1.3, \\ e^x + y = 2.5. \end{cases}$$

se plantea el siguiente esquema de punto fijo

$$x = g_1(x, y) = \ln(2.5 - y), \quad y = g_2(x, y) = \sqrt{1.3 - \sin x}.$$

Se sabe que $G(x, y) = (g_1(x, y), g_2(x, y))$, $D = \{(x, y) : 0.4 \leq x \leq 0.6, 0.85 \leq y \leq 0.96\}$, cumple la condición de existencia ($G(D) \subset D$).

Indique si la afirmación siguiente es **verdadera (V)** o **falsa (F)**:

La función $G(x, y)$ cumple la condición de contracción en D .

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] En el diseño de un vehículo autónomo para inspección marina, la *potencia total requerida* para mantener velocidad constante v (m/s) se modela como $P(v) = \alpha v^3 + \frac{\beta}{v}$, donde $\alpha > 0$ representa la contribución cúbica por arrastre y $\beta > 0$ pérdidas dependientes de la inversa de la velocidad.

La *velocidad óptima* que minimiza la potencia es

$$v^* = \left(\frac{\beta}{3\alpha} \right)^{1/4}.$$

Se tienen estimaciones con incertidumbre relativa porcentual:

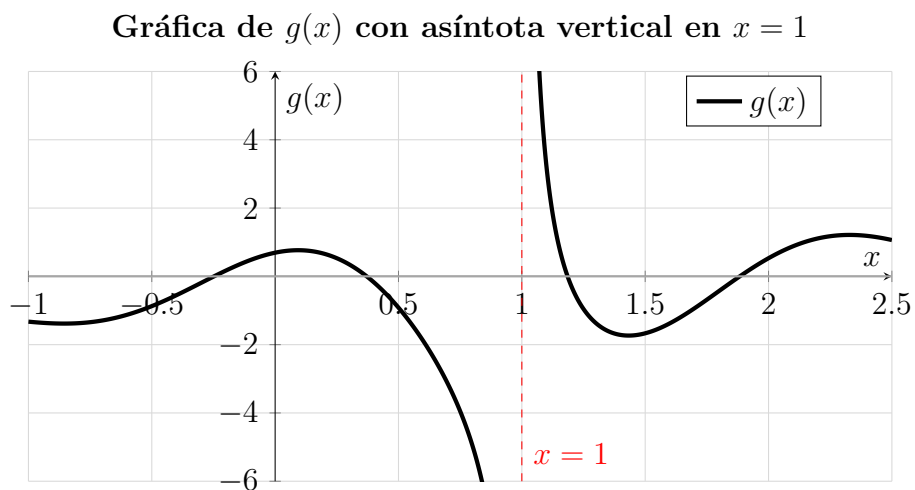
$$\alpha = 2.0 \frac{\text{W s}^3}{\text{m}^3} \pm 5\%, \quad \beta = 9.0 \frac{\text{W m}}{\text{s}} \pm 10\%.$$

Calcule el **error relativo porcentual** en v^* debido a la propagación de errores de α y β .

4. [3 pts] Dada la siguiente función:

$$g(x) = \ln(x+2) - \frac{\cos(4x)}{x-1} - 1, \quad x \in [-1, 2.5],$$

cuya gráfica se muestra a continuación:



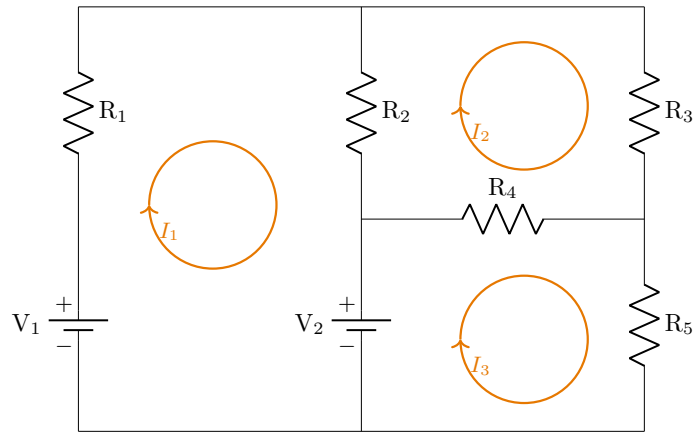
a. [0.5 pts] Determine el número de raíces reales en dicho intervalo.

b. [0.5 pts] Localice el intervalo de longitud 0.5 que contenga a la mayor raíz real (según el intervalo de análisis), de modo que el extremo derecho sea un número entero.

- c. [2 pts] Con el intervalo del ítem anterior, efectúe **tantas iteraciones del método de la bisección** como sean necesarias para alcanzar una tolerancia de 0.08 mostrando sus cálculos de forma detallada. Sea $\hat{x}$ la aproximación a la raíz indique dicho valor y reporte el valor de $g(\hat{x})$.

APLICACIONES

5. [10 ptos] Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura, donde se muestran 2 fuentes de voltaje y 5 resistencias.



- a) [4 ptos] Plantee las ecuaciones lineales en el orden de las corrientes y exprese el SEL en la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para estimar el vector de corrientes $\mathbf{x} = [I_1 \ I_2 \ I_3]^T$ de tal manera que los elementos de la diagonal de $\mathbf{A}$ son mayores o igual a cero.

b) [4 ptos] Considere los siguientes valores de los parámetros

$$R_1 = 10\,\Omega, \quad R_2 = 8\,\Omega, \quad R_3 = 5\,\Omega, \quad R_4 = 5\,\Omega, \quad R_5 = 2\,\Omega, \quad V_1 = 10\,\text{V}, \quad V_2 = 5\,\text{V}.$$

Halle la matriz y el vector de iteración de Jacobi. Luego, determine la solución usando el punto semilla $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5 \quad 0.5 \quad 1.2]^T$ y una tolerancia de 0.08.

- c) **[2 ptos]** Analice la convergencia del método de Gauss-Seidel. Indique claramente si el método converge o diverge.

Formulario

1. **Punto Fijo:** Sea $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, n\}$ para algún conjunto de constantes $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_n$. Supongamos que $\mathbf{G}$ es una función continua de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ siempre que $\mathbf{x} \in D$. Entonces $\mathbf{G}$ tiene un único punto fijo en D . Supongamos, además, que $\mathbf{G}$ tiene derivadas parciales continuas y que existe una constante $K < 1$ con

$$\left| \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right| \leq \frac{K}{n}, \quad \text{siempre que } \mathbf{x} \in D,$$

para toda $j = 1, 2, \dots, n$ y toda función componente g_j . Entonces la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, definida por una $\mathbf{x}^{(0)}$ seleccionada en D arbitrariamente y generada por

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad \text{para cada } k \geq 1,$$

converge en el único punto fijo $\mathbf{p} \in D$.

2. **Teoría de errores:** Sean las magnitudes $x_1 \pm \Delta x_1$ y $x_2 \pm \Delta x_2$ y la magnitud derivada $q = f(x_1, x_2)$ entonces la incertidumbre Δq está dada por:

$$\Delta q \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right| \cdot \Delta x_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2} \right| \cdot \Delta x_2$$

Observación: Esta es una idea para generalizar el caso a varias variables.

3. **Métodos Iterativos:** Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

El esquema iterativo es $x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$

- Esquema iterativo de Jacobi:

$$T_j = D^{-1}(L + U), \quad c_j = D^{-1}b$$

- Esquema iterativo de Gauss-Seidel:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1}U, \quad c_{gs} = (D - L)^{-1}b$$

- Diagonal estrictamente dominante (DED): La matriz A es DED si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \text{para } i = 1, \dots, n$$

- Radio espectral: El radio espectral de la matriz T está dado por

$$\rho(T) = \max\{|\lambda| : \det(T - \lambda I) = 0\}$$

4. **Polinomio interpolante de Lagrange:** $P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$.

Los polinomios básicos de Lagrange son

$$L_k(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Propiedades:

- L_k es un polinomio de grado n .

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$