

**Instrucciones:** Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

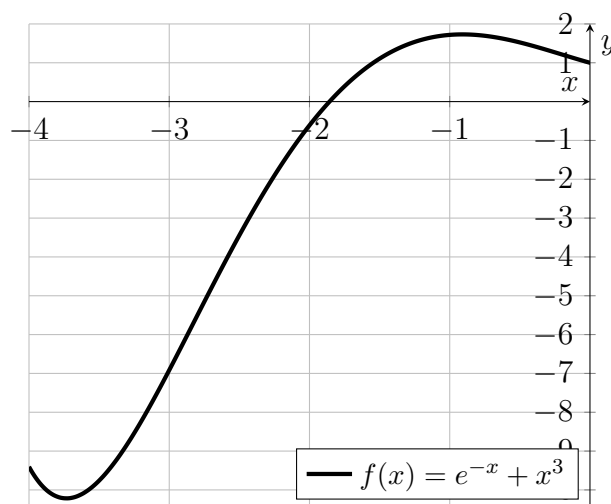
Apellidos y Nombres:

**Duración 100 minutos**

### CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Dada la función  $f(x) = e^{-x} + x^3 - x$  ;  $x \in [-3; -2]$ . Para hallar en forma aproximada una raíz de  $f$  mediante el método del punto fijo se considera el despeje  $x = g(x) = e^{-x} + x^3$ , cuya gráfica se muestra a continuación:



Luego se concluye que el proceso iterativo asociado garantiza convergencia desde cualquier punto inicial  $x_0 \in [-3; -2]$ .

2. [2 ptos] Consideremos las tablas de datos:

|     |     |     |     |      |
|-----|-----|-----|-----|------|
| $x$ | 2   | 3   | 5   | 8    |
| $y$ | 100 | -50 | 300 | -600 |

y

|     |      |     |     |     |
|-----|------|-----|-----|-----|
| $x$ | 8    | 2   | 3   | 5   |
| $y$ | -600 | 100 | -50 | 300 |

donde  $P(x)$  y  $Q(x)$  son los respectivos polinomios interpolantes hallados por el método de Newton, entonces  $P(7) - Q(7) = 850$

### PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] En un laboratorio de mecánica de fluidos se desea determinar la **viscosidad dinámica**  $\mu$  de un fluido aplicando la **Ley de Poiseuille**, la cual describe el flujo laminar de un fluido newtoniano en un tubo cilíndrico. A partir de esta ley, la viscosidad dinámica puede obtenerse mediante la siguiente expresión:

$$\mu = \frac{\pi r^4 \Delta P}{8QL} \quad \left\{ \begin{array}{l} r = 0.05 \text{ m} \\ \Delta P = 95\,000 \text{ Pa} \pm 0.1 \% \\ Q = 0.233 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s} \pm 0.001 \text{ m}^3/\text{s} \\ L = 5 \text{ m} \pm 0.2 \% \end{array} \right.$$

donde  $r$  es el radio del tubo,  $\Delta P$  la diferencia de presión entre sus extremos,  $Q$  el caudal volumétrico y  $L$  la longitud del tubo.

- a. [2 pts] Encuentre una expresión para determinar el error absoluto en el cálculo de la viscosidad dinámica  $\mu$ . **Nota:** La expresión debe estar solo en función de  $r$ ,  $\Delta P$ ,  $Q$  y  $L$  (debe desarrollar las derivadas, no presentarlas como respuesta final).

- b. [1 pts] Determine el error relativo porcentual en la estimación de la viscosidad dinámica  $\mu$ .

4. [3 pts] En un canal de sección rectangular se desea determinar el **caudal**  $Q$  y el **tirante de flujo**  $y$  que satisfacen simultáneamente las ecuaciones de **energía específica** y de **relación geométrica del flujo**. El sistema de ecuaciones que describe el comportamiento hidráulico es:

$$\begin{cases} f_1(Q, y) = \frac{Q^2}{g} - b^2 y^3 = 0 & b = 2 \text{ m} \\ f_2(Q, y) = y + \frac{Q^2}{2gb^2 y^2} - E = 0 & E = 1.20 \text{ m} \\ & g = 9.81 \text{ m/s}^2 \end{cases}$$

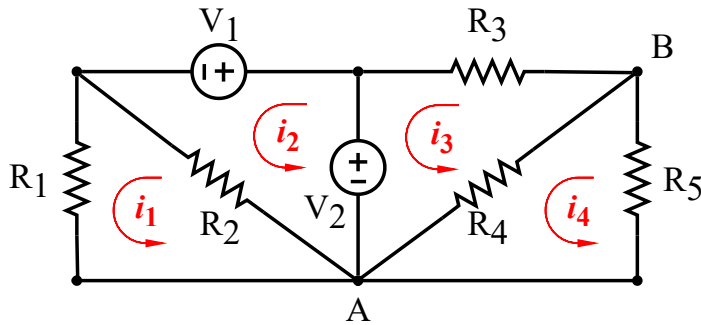
Donde  $b$  es el ancho de la base del canal,  $T$  es la longitud de la superficie de agua,  $E$  es la energía específica y  $g$  es la aceleración de la gravedad.

- a. [1 pts] Halle la matriz jacobiana  $J(\mathbf{x})$  (expresión matemática). Luego evalúe dicha matriz en el punto semilla  $\mathbf{x}^{(0)} = [4.3 \quad 0.85]^T$ .

- b. [2 pts] Ejecute el método de Newton para hallar la solución aproximada considerando el mismo punto semilla del ítem anterior y una tolerancia de 0.055.

## APLICACIONES

6. [10 pts] Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura, donde se muestran 2 fuentes de voltaje y 5 resistencias.



$$R_1 = R_2 = R_3 = 5 \, \Omega$$

$$R_4 = R_5 = 10 \, \Omega$$

$$V_1 = 12 \, \text{VDC}$$

$$V_2 = 24 \, \text{VDC}$$

- a) [3 pts] Plantee las ecuaciones lineales en el orden de las corrientes y exprese el sistema SEL en la forma matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  para estimar el vector de corrientes  $\mathbf{x} = [i_1 \ i_2 \ i_3 \ i_4]^T$  de tal manera que  $b_1, b_2, b_4 \geq 0$  y  $b_3 \leq 0$ .

- b) [3 ptos] Analice el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss-Seidel. En base al resultado de dicho análisis indique claramente si el método **converge o diverge**. **Sugerencia:** *Puede emplear el teorema de Gershgorin para acotar el espectro de la matriz de iteración y sustentar su conclusión. En tal caso, detallar cuidadosamente el razonamiento seguido.*

- c) [4 ptos] Aplique el método de Gauss-Seidel considerando un punto semilla de  $\mathbf{x}^{(0)} = [2.5 \ 5 \ -2.5 \ -1.3]^T$  y una tolerancia de 0.015. Luego, determine el **valor de la corriente**  $i_{AB}$  (considere el signo).

## Formulario

### 1. Método de Newton para S.E.N.L:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})F(\mathbf{x}^{(k)})$$

### 2. Convergencia del método del punto fijo:

Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tales que  $a < b$  y sea  $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función continua en  $[a, b]$  y derivable en  $\langle a, b \rangle$  que satisface:

- Para cualquier punto  $x$  en  $[a, b]$ , se tiene que  $g(x) \in [a, b]$  (condición de existencia).
- Se cumple  $|g'(x)| < 1$  para cualquier  $x \in \langle a, b \rangle$  (condición de contracción).

Entonces existe un único punto  $p \in \langle a, b \rangle$  tal que  $g(p) = p$ . Además, si  $x^{(0)}$  es algún punto del intervalo  $[a, b]$ , y la sucesión  $\{x^{(k)}\}$  se construye de manera recursiva

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

entonces, la sucesión  $\{x^{(k)}\}$  converge al punto fijo  $p$  de la función  $g$ .

### 3. Teoría de errores:

Sean las medidas  $\tilde{x}_1$  y  $\tilde{x}_2$  con incertidumbres  $\Delta\tilde{x}_1$  y  $\Delta\tilde{x}_2$  usadas para calcular  $f(x_1, x_2)$  se puede estimar la incertidumbre (error absoluto):

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_2$$

### 4. Métodos Iterativos:

Sea el sistema  $Ax = b$ , donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- Esquema iterativo de Gauss-Seidel:**  $x^{(k+1)} = (D - L)^{-1}Ux^{(k)} + (D - L)^{-1}b$   
donde  $T_{gs} = (D - L)^{-1}U$ , es la **matriz de iteración de Gauss-Seidel** y  $c_{gs} = (D - L)^{-1}b$  es el **vector de Gauss-Seidel**.
- Radio espectral de  $T$  ( $\rho(T)$ ):**  $\rho(T) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ es valor propio de } T\}$
- Error relativo y norma infinito:** Sea  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$  un vector:

$$\delta^{(k+1)} = \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

### 5. Polinomio interpolante de Newton:

Para  $n + 1$  datos  $(x_i, y_i)$  se tiene:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

donde:

$$\begin{aligned} b_0 &= f[x_0] \\ b_1 &= f[x_0, x_1] \\ b_2 &= f[x_0, x_1, x_2] \\ &\vdots \\ b_k &= f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$