

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

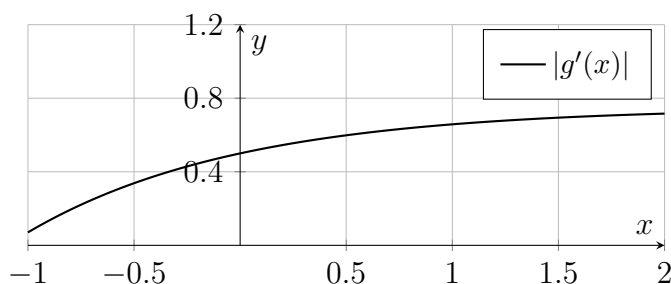
Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

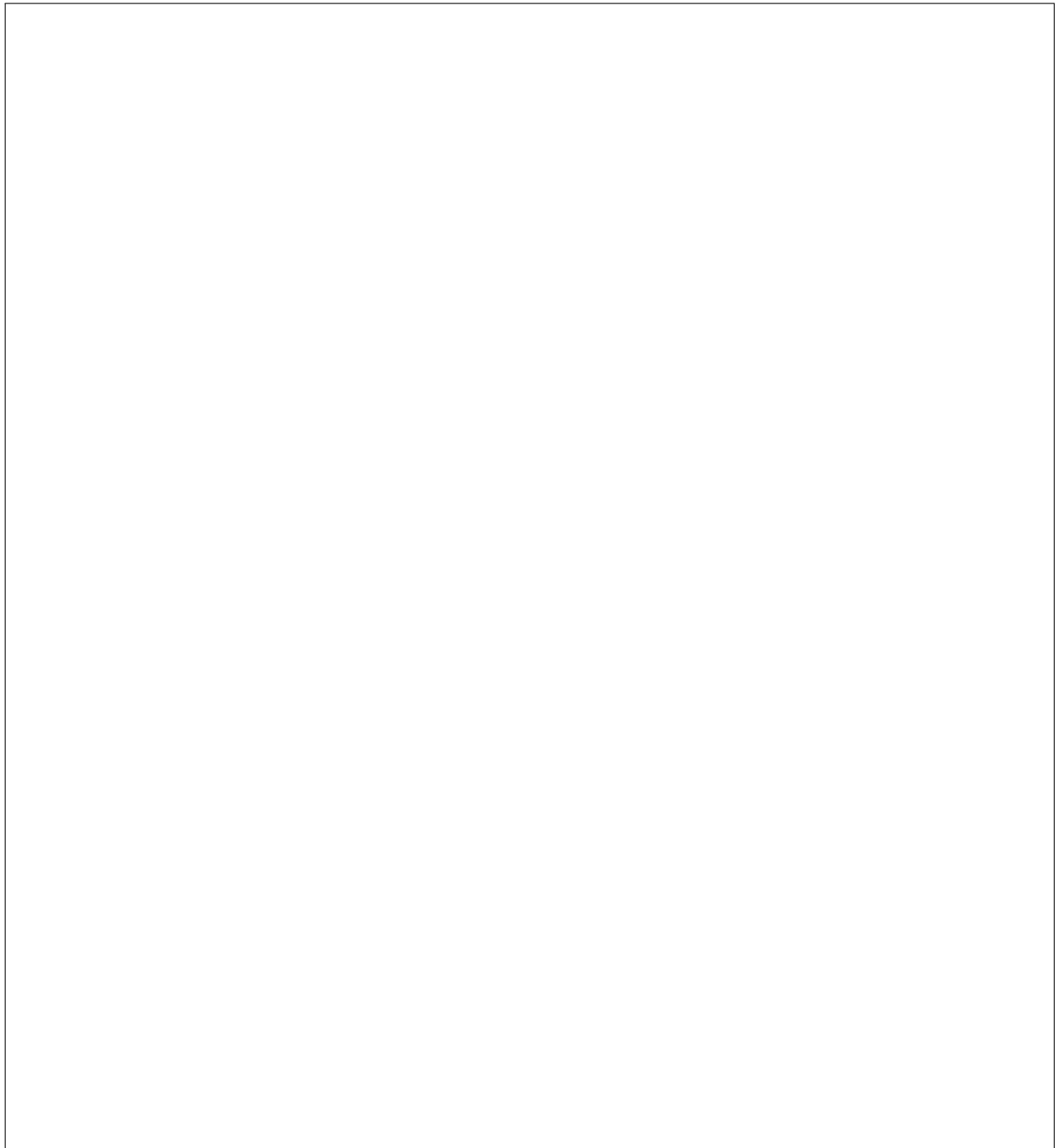
1. [2 ptos] Sea la función $g(x) = \frac{e^{-x} + 3x - 2}{4}$ escrita en forma de punto fijo. Se afirma que, como $g(x)$ cumple la condición de contracción en el intervalo $[-1, 2]$, el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para todo $x^{(0)} \in [-1, 2]$.



2. [2 ptos] Sea $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ con $a \neq 0$. Sean x_0, x_1, x_2 tres números distintos y $P_2(x)$ el polinomio interpolante de grado ≤ 2 de f en dichos puntos. Es correcto afirmar que: “La función error $E_f(x)$ es un polinomio *cuadrático* (de grado ≤ 2)”.

Sugerencia: Sea $f(x)$ una función con $n+1$ derivadas continuas en $[a, b]$. Si $x_0, x_1, \dots, x_n$ son nodos distintos de interpolación de f y $P_n(x)$ es el polinomio interpolante de grado $\leq n$ tal que $P_n(x_i) = f(x_i)$, entonces el error de interpolación es:

$$E_f(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} (x - x_0) \cdots (x - x_n) \quad , \quad \xi(x) \in \langle a, b \rangle$$



PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] La energía específica E de un flujo parcialmente lleno en un canal circular se puede determinar mediante la expresión:

$$E = \frac{D}{2} \left(1 - \cos \frac{\theta}{2} \right) + \frac{Q^2}{2g} \left[\frac{D^2}{8} (\theta - \sin \theta) \right]^{-2}$$

donde D es el diámetro del conducto, Q es el caudal del flujo, g es la aceleración de la gravedad y θ es el ángulo central que define la profundidad del flujo en la sección.

Se desea determinar el ángulo θ (en radianes) que satisface una energía específica de $E = 0.32$ m, para un diámetro $D = 2$ m, caudal $Q = 0.2$ m³/s y $g = 9.81$ m/s².

- a. [1 pts] Considerando $f(\theta) = E(\theta) - E$, halle la expresión $f'(\theta)$.

- b. [2 pts] Lleve a cabo el método de Newton para determinar la solución aproximada usando $\theta^{(0)} = 1.6$ y una tolerancia de 0.02.

4. [3 pts] En un túnel de viento se desea representar la **fuerza de arrastre adimensional** C_D de un perfil aerodinámico en función del **ángulo de ataque** α . Se realizaron ensayos experimentales obteniéndose los siguientes datos:

k	0	1	2
α (°)	5	10	15
$C_D(\alpha)$	0.04	0.08	0.13

- a. [2 pts] Determine los polinomios básicos de Lagrange $L_k(V)$ ($k = 0, 1, 2$). No es necesario desarrollar o simplificar la expresión.

- b. [1 pts] Construya el polinomio de interpolación de Lagrange. Luego estime el valor de $C_D(7^\circ)$.

APLICACIONES

5. [10 ptos] Considere la siguiente ecuación diferencial que surge de la forma adimensional de la ecuación de Schrödinger estacionaria para una partícula confinada en un potencial periódico del tipo $V(x) = V_0 \cos(2x)$:

$$\boxed{\frac{d^2\psi}{dx^2} + (a - 2q \cos(2x))\psi = 0} \quad , \quad 0 \leq x \leq 2\pi,$$

Sujeta a las condiciones de frontera: $\psi(0) = 0$, $\psi(2\pi) = 1$.

El parámetro a representa la energía adimensional ($a \propto E$), q caracteriza la intensidad adimensional del potencial ($q \propto V_0$) y x es una variable adimensional (posición escalada). La función de onda $\psi(x)$ tiene unidades de $m^{-1/2}$ que no se alteran por el escalado.

- a) [3 ptos] Discretice la ecuación diferencial que describe la función de onda $\psi(x)$. Considere **5 nodos** (incluyendo las fronteras) igualmente espaciados y ordenados en el intervalo $0 \leq x \leq 2\pi$, calcule Δx . Además, considere las siguientes expresiones para las derivadas:

$$\left. \frac{d^2\psi}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{\psi_{i-1} - 2\psi_i + \psi_{i+1}}{(\Delta x)^2} \quad , \quad S \left. \frac{d\psi}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{\psi_{i+1} - \psi_i}{\Delta x}.$$

Luego, escriba el sistema de ecuaciones para los valores interiores ψ_1, ψ_2, ψ_3 en forma matricial $\mathbf{A}\boldsymbol{\psi} = \mathbf{b}$ en términos de a y q (use los valores de x_i y Δx).

- b) [3 ptos] Considerando los valores: $a = 5$ y $q = 1.5$, analice el radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi. En base al resultado de dicho análisis indique claramente si el método **converge o diverge**.

- c) [4 ptos] Aplique el método de Jacobi considerando $a = 5$ y $q = 1.5$, con un punto semilla de $\boldsymbol{\psi}^{(0)} = [-0.01 \quad 0.025 \quad -0.05]^T$ y una tolerancia de 0.01. **Nota:** Use la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$) y el error relativo como criterio de proximidad a la raíz.

Formulario:

1. **Convergencia del método del punto fijo:** Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b \rangle$ que satisface:

- a) Para cualquier punto x en $[a, b]$, se tiene que $g(x) \in [a, b]$ (condición de existencia).
- b) Se cumple $|g'(x)| < 1$ para cualquier $x \in \langle a, b \rangle$ (condición de contracción).

Entonces existe un único punto $p \in \langle a, b \rangle$ tal que $g(p) = p$. Además, si $x^{(0)}$ es algún punto del intervalo $[a, b]$, y la sucesión $\{x^{(k)}\}$ se construye de manera recursiva

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

entonces la sucesión $\{x^{(k)}\}$ converge al punto fijo p de la función g .

2. **Fórmula del método de Newton - Raphson:**

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

considerando $f'(x_i) \neq 0$ y criterio de parada al **error relativo**.

3. **Métodos Iterativos:** Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- Esquema iterativo de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

donde $T_j = D^{-1}(L + U)$, es la **matriz de iteración de Jacobi** y $c_j = D^{-1}b$ es el **vector de Jacobi**.

- Radio espectral de T ($\rho(T)$): $\rho(T) = \text{Max}\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } T\}$
- Norma infinito de un vector: Sea $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ un vector:

$$\|x\|_{\infty} = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

4. **Polinomio básico de Lagrange:** Para $n + 1$ datos (x_i, y_i) se tiene:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - \mathbf{x_{k-1}})(x - \mathbf{x_{k+1}}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - \mathbf{x_{k-1}})(x_k - \mathbf{x_{k+1}}) \dots (x_k - x_n)}$$

Propiedades:

- L_k es un polinomio de grado n .
- $L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$

El polinomio interpolante es $P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$