

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

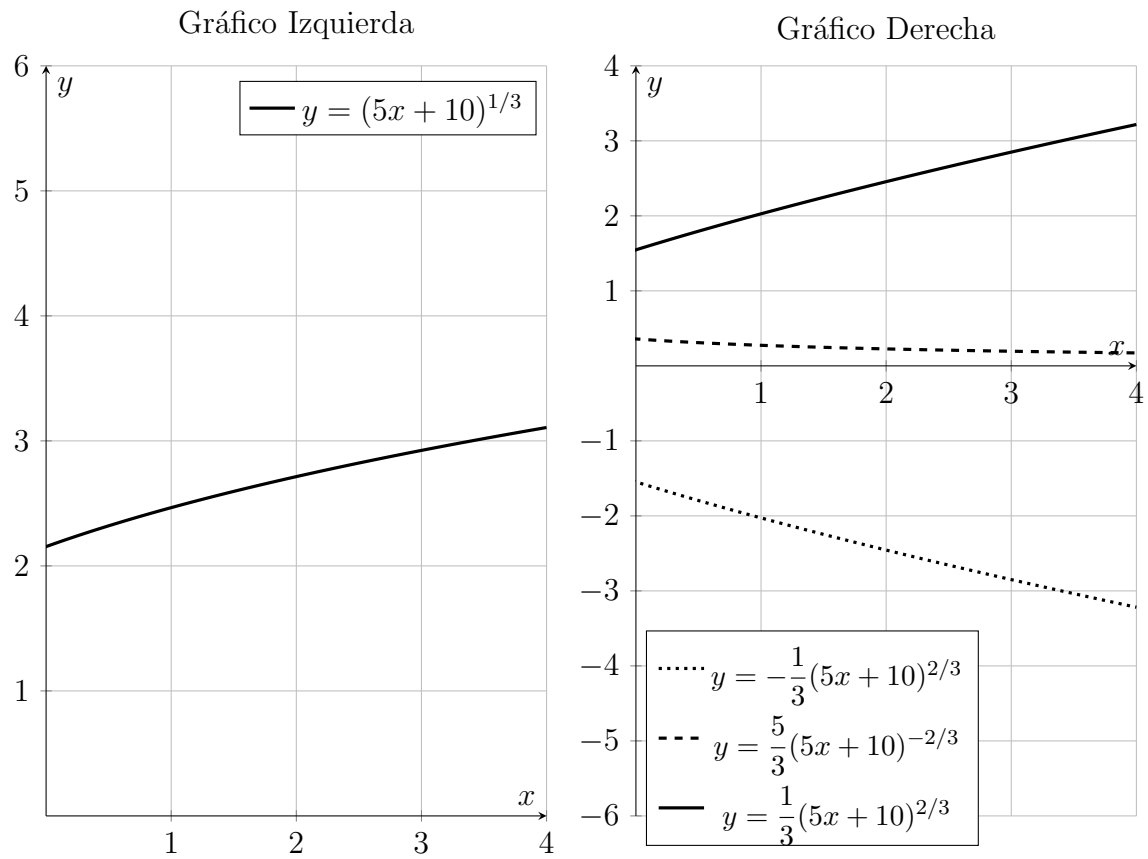
Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Sea $n > 1$, A una matriz invertible de orden n , $\mathbf{b}$ y $\mathbf{v}$ dos vectores de $\mathbb{R}^n$. Se afirma que “si aplicamos el método de Newton-Raphson al sistema lineal $A\mathbf{x} - \mathbf{b} = \mathbf{0}$ con el punto semilla $\mathbf{v}$ entonces la primera iteración está dada por $\mathbf{x}^{(1)} = A^{-1}\mathbf{b} - \frac{1}{n}\mathbf{v}$ ”.
Sugerencia: Analice el caso de dos ecuaciones **algebraicas** con dos incógnitas.

2. [2 ptos] Dada la función $f(x) = x^3 - 5x - 10$ con $x \in [2; 3]$, considerando el despeje $x = g(x) = \sqrt[3]{5x+10}$ para aplicar el método del punto fijo y de las gráficas de las funciones $g(x)$ y de $g'(x)$ respectivamente



Entonces se concluye que el proceso iterativo asociado es convergente para cualquier punto semilla $x_0 \in [2; 3]$.

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] El coeficiente de sustentación es una medida (adimensional) de la capacidad de una superficie aerodinámica para generar sustentación. La expresión que permite estimar dicho coeficiente es:

$$C_L = \frac{2F}{\rho V^2 A}$$

donde F (en N) es la fuerza de sustentación, ρ (en kg/m^3) es la densidad del fluido, V (en m/s) es la velocidad relativa entre el perfil aerodinámico y el aire y A (en m^2) es el área de la superficie de referencia.

Si $\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$, $F = 6\,600 \text{ N}$, $V = 50 \text{ m/s} \pm 0.01$ y $A = 10 \text{ m}^2 \pm 0.1 \text{ m}^2$. Halle el valor del error relativo porcentual en la determinación del coeficiente de sustentación C_L .

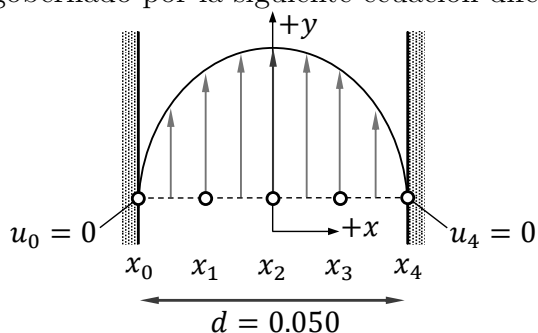
4. [3 ptos] Durante un ensayo en un canal hidráulico se midió la **velocidad** del flujo de agua V (m/s) para distintas **profundidades** h (m). Los datos obtenidos fueron:

h (m)	0	0.25	0.5	1
V (m/s)	0	0.5	0.9	0.8

- a) Construya la **tabla de diferencias divididas**.
b) Obtenga el **polinomio interpolante de Newton** $P_3(h)$.
c) Use $P_3(h)$ para **estimar** la velocidad cuando $h = 0.73$ m.

APLICACIONES

5. En un flujo laminar, incompresible y totalmente desarrollado de un fluido viscoso entre dos placas planas paralelas separadas una distancia d , el perfil de velocidad $u(x)$ está gobernado por la siguiente ecuación diferencial:



$$\frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dy}$$

$$\mu = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\frac{dP}{dy} = -0.12 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$$

Donde μ es la viscosidad dinámica del fluido (Pa·s), dP/dy representa el gradiente de presión **constante** aplicado a lo largo del eje y (Pa/m), d corresponde a la separación entre las dos placas paralelas, x es la coordenada transversal perpendicular al flujo y u es la velocidad del fluido en la dirección y , en el punto x .

- a) [4 ptos] Discretice la ecuación diferencial que describe el perfil de velocidad u . Considere nodos igualmente espaciados y ordenados como se muestra en la figura previa. Además, considere las siguientes expresiones para las derivadas:

$$\left. \frac{d^2 u}{dx^2} \right|_{x=x_i} \approx \frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{(\Delta x)^2}, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=x_i} \approx \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}.$$

Luego, escriba el sistema de ecuaciones lineales en forma matricial $\mathbf{A}\mathbf{u} = \mathbf{b}$, donde $\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ u_3]^T$.



- b) [2 ptos] Analice el radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi. En base al resultado de dicho análisis indique claramente si **converge o diverge**.



- c) [4 ptos] Aplique el método de Jacobi considerando un punto semilla de $\mathbf{u}^{(0)} = [1.4 \ 1.9 \ 1.4]^T$ y una tolerancia de 0.015. Indique cuál es el valor de la **velocidad máxima**.

Formulario

1. Método de Newton para S.E.N.L:

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} - J^{-1}(\mathbf{x}^{(k)})F(\mathbf{x}^{(k)})$$

2. Convergencia del método del punto fijo:

Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a < b$ y sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$ y derivable en $\langle a, b \rangle$ que satisface:

- Para cualquier punto x en $[a, b]$, se tiene que $g(x) \in [a, b]$ (condición de existencia).
- Se cumple $|g'(x)| < 1$ para cualquier $x \in \langle a, b \rangle$ (condición de contracción).

Entonces existe un único punto $p \in \langle a, b \rangle$ tal que $g(p) = p$. Además, si $x^{(0)}$ es algún punto del intervalo $[a, b]$, y la sucesión $\{x^{(k)}\}$ se construye de manera recursiva

$$x^{(k+1)} = g(x^{(k)})$$

entonces, la sucesión $\{x^{(k)}\}$ converge al punto fijo p de la función g .

3. Teoría de errores:

Sean las medidas $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ con incertidumbres $\Delta\tilde{x}_1$ y $\Delta\tilde{x}_2$ usadas para calcular $f(x_1, x_2)$ se puede estimar la incertidumbre (error absoluto):

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_2$$

4. Métodos Iterativos:

Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

■ Esquema iterativo de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

donde $T_j = D^{-1}(L + U)$, es la **matriz de iteración de Jacobi** y $c_j = D^{-1}b$ es el **vector de Jacobi**.

■ Radio espectral de T ($\rho(T)$):

$$\rho(T) = \max\{|\lambda_i| : \lambda_i \text{ es valor propio de } T\}$$

■ Error relativo y norma infinito:

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^\top \in \mathbb{R}^n$ un vector:

$$\delta^{(k+1)} = \frac{\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^{(k)}\|_\infty}{\|\mathbf{x}^{(k+1)}\|_\infty}, \quad \|\mathbf{x}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$$

5. Polinomio interpolante de Newton:

Para $n + 1$ datos (x_i, y_i) se tiene:

$$P_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + b_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$$

donde:

$$\begin{aligned} b_0 &= f[x_0] \\ b_1 &= f[x_0, x_1] \\ b_2 &= f[x_0, x_1, x_2] \\ &\vdots \\ b_k &= f[x_0, x_1, \dots, x_k], \quad k = 0, 1, \dots, n \end{aligned}$$