

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Si $g(x) = x^2$ tiene n puntos fijos entonces $h(x) = x^{n+1}$ tiene 3 puntos fijos

2. [2 ptos] Dado el sistema de ecuaciones no lineales $\begin{cases} x^3 + 3y^2 = 0 \\ x^2 + 2y + 2 = 0 \end{cases}$ entonces la matriz Jacobiana es invertible para todo punto de la forma $(0; y)$ con $y \in \mathbb{R}$

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] Una cadena uniforme, de longitud L , está colocada sobre una tabla horizontal, libre de fricción, de tal manera que una parte de longitud b de la cadena cae por el borde. Se demuestra que el tiempo t que tarda la cadena en deslizarse completamente hacia abajo viene dado por:

$$t = \ln \left(\frac{L + \sqrt{L^2 - b^2}}{b} \right) \sqrt{\frac{L}{g}}$$

siendo $g = 9.8m/s^2$ la aceleración de la gravedad.

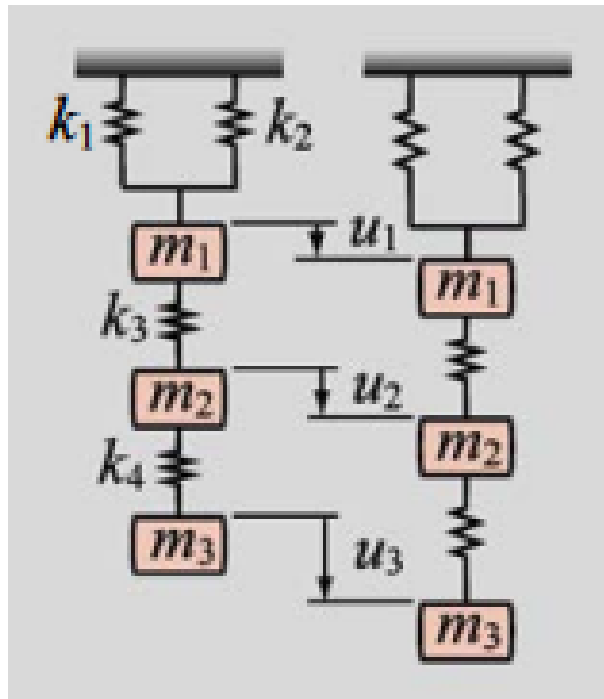
- a) [1.5 ptos] Si $b = 5$ y $t = 15$ demuestre que existe un único valor $L^* \in [5; 150]$ tal que satisface la ecuación planteada.

- b) [1.5 ptos] Halle el menor número de iteraciones n necesarias del método de la bisección para hallar un valor aproximado de L^* iniciando en el intervalo $[130; 140]$, considerando una tolerancia $Tol = 10^{-5}$

4. **[3 ptos]** Sea la ecuación no lineal $f(x) = e^{-x} + x - 2 = 0$, si consideramos la expresión de punto fijo $x = g(x) = 2 - e^{-x}$ sabemos que si se dan las condiciones de convergencia todo punto fijo de g es raíz de f . Analice la convergencia del proceso iterativo asociada a la función g en el intervalo $[1; 2]$. Justifique detalladamente su razonamiento.

APLICACIONES

5. [10 ptos] Tres masas, $m_1 = 2$ kg, $m_2 = 3$ kg y $m_3 = 1.5$ kg, están unidas a resortes cuyas constantes son: $k_1 = 30$ N/m, $k_2 = 25$ N/m, $k_3 = 20$ N/m y $k_4 = 15$ N/m, como se muestra en la figura. Inicialmente, las masas se colocan de manera que los resortes estén en su longitud natural (sin estirar, ni comprimir); luego, las masas se sueltan lentamente y se mueven hacia abajo hasta que se estabilizan en la posición de equilibrio, tal como se muestra a la derecha de la figura. (El sistema se mantiene en equilibrio)



Si u_1 , u_2 y u_3 son los desplazamientos de las masas por acción del estiramiento de los resortes, entonces las ecuaciones de equilibrio de las tres masas son:

$$\begin{aligned}(k_1 + k_2 + k_3)u_1 - k_3u_2 &= m_1g \\ -k_3u_1 + (k_3 + k_4)u_2 - k_4u_3 &= m_2g \\ -k_4u_2 + k_4u_3 &= m_3g\end{aligned}$$

Determine el desplazamiento de las tres masas. (Tome $g = 9.81$ m/s²).

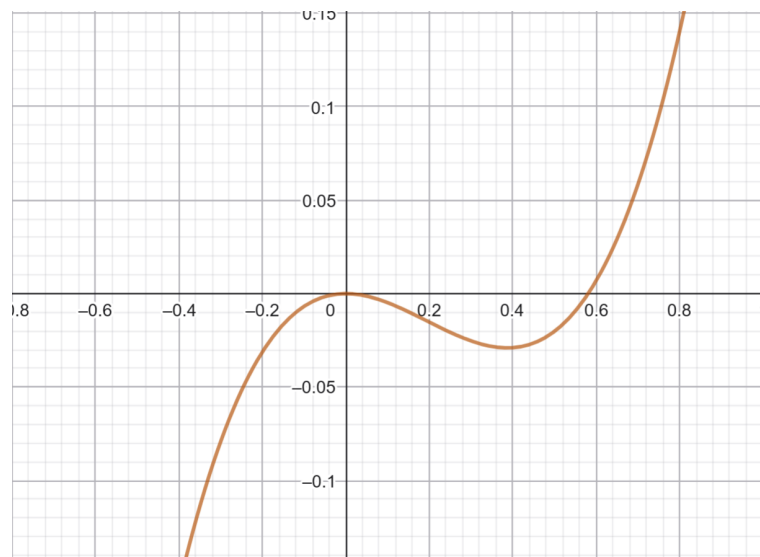
- a) [2 ptos] Modele el problema planteado mediante un sistema de ecuaciones lineales, en su forma matricial. Luego de ello realice la descomposición de la matriz de coeficientes en D , L y U .



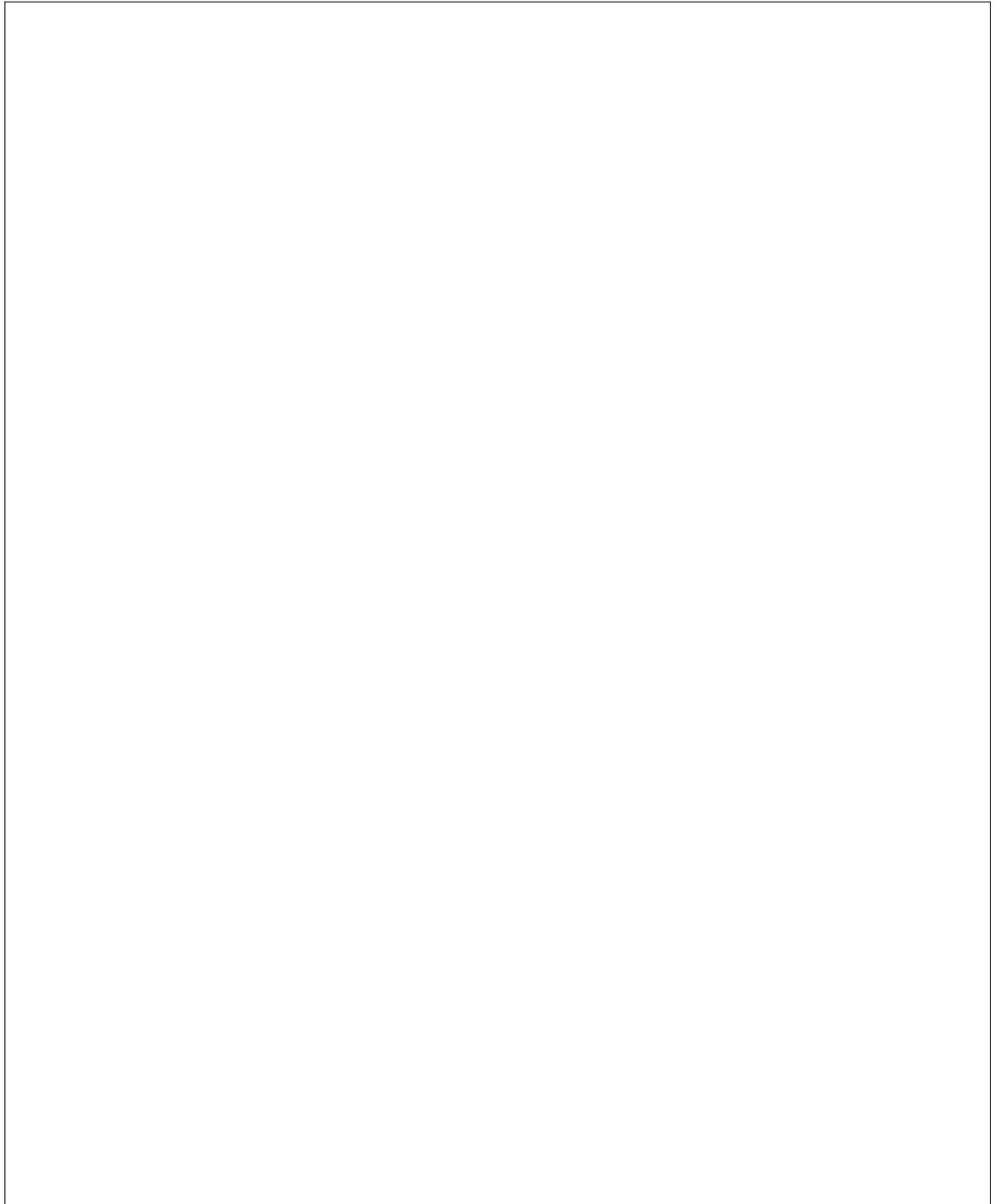
- b) [3 ptos] Para realizar el estudio de convergencia del método de Gauss-Seidel, mediante el criterio del radio espectral, se requiere hallar la matriz de iteración T_{gs} . Determine dicha matriz de iteración, (puede utilizar el dato):

$$(D - L)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/75 & 0 & 0 \\ 4/525 & 1/35 & 0 \\ 4/525 & 1/35 & 1/15 \end{bmatrix}$$

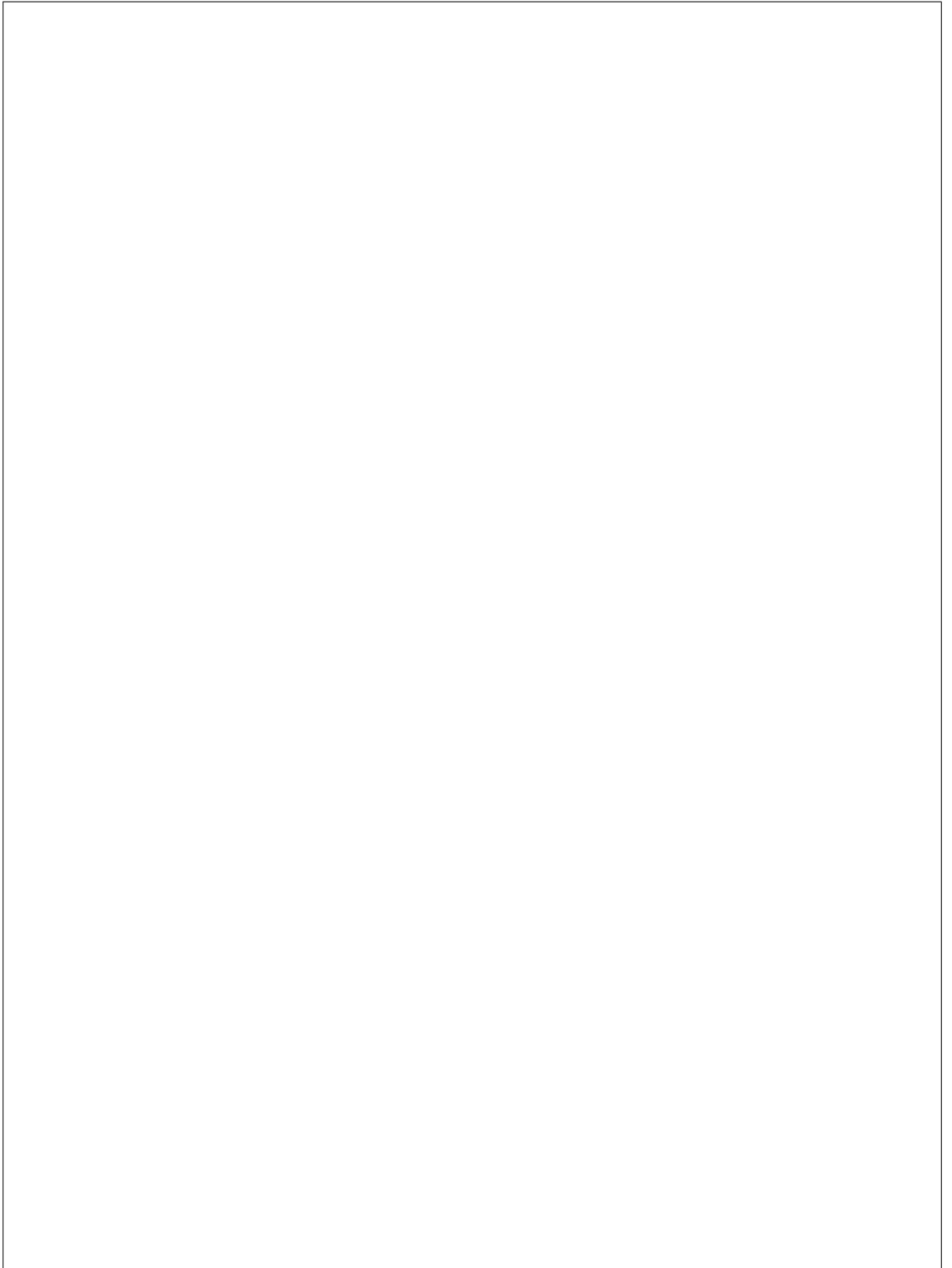
Si además se conoce que $P(\lambda)$ es el polinomio característico, cuyo gráfico se muestra a continuación



El método iterativo de Gauss Seidel converge o diverge?



- c) **[5 ptos]** Realize dos iteraciones del método de Gauss-Seidel, seleccionando como iterado inicial $x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$, calcule en cada paso el error relativo cometido.



Formulario

1. Sea $D = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i, \text{ para toda } i = 1, 2, \dots, n\}$ para algún conjunto de constantes $a_1, a_2, \dots, a_n$ y $b_1, b_2, \dots, b_n$. Supongamos que $\mathbf{G}$ es una función continua de $D \subseteq \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ con la propiedad de que $\mathbf{G}(\mathbf{x}) \in D$ siempre que $\mathbf{x} \in D$. Entonces $\mathbf{G}$ tiene un único punto fijo en D .

Supongamos, además, que $\mathbf{G}$ tiene derivadas parciales continuas y que existe una constante $K < 1$ con

$$\left| \frac{\partial g_j(\mathbf{x})}{\partial x_i} \right| \leq \frac{K}{n}, \quad \text{siempre que } \mathbf{x} \in D,$$

para toda $j = 1, 2, \dots, n$ y toda función componente g_j . Entonces la sucesión $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, definida por una $\mathbf{x}^{(0)}$ seleccionada en D arbitrariamente y generada por

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{G}(\mathbf{x}^{(k-1)}), \quad \text{para cada } k \geq 1,$$

converge en el único punto fijo $\mathbf{p} \in D$.

2. **Teoría de errores:** Sean las medidas $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ con incertidumbres $\Delta\tilde{x}_1$ y $\Delta\tilde{x}_2$ usadas para calcular $q = f(x_1, x_2)$ mediante la aproximación de Taylor para el caso de varias variables se puede estimar la incertidumbre $\Delta\tilde{q}$:

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_2$$

Observación: Esta es una idea para generalizar el caso a varias variables.

3. **Métodos Iterativos:** Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

El esquema iterativo es

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

- Esquema iterativo de Gauss-Seidel:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1}U, \quad c_{gs} = (D - L)^{-1}b$$

- Radio espectral de T ($\rho(T)$):

$$\rho(T) = \text{Max}\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } T\}$$

4. Polinomio básico de Lagrange: Para $n + 1$ datos (x_i, y_i) se tiene:

$$L_k(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)} = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}$$

Propiedades:

- L_k es un polinomio de grado n .

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

El polinomio interpolante es $P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k L_k(x)$