

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] En el estándar **IEEE 754**, el número decimal 0.1 tiene una **representación exacta** tanto en *precisión simple* (32 bits) como en *precisión doble* (64 bits); por lo tanto, al convertir 0.1 a binario bajo el estándar **IEEE 754** y volver a decimal no se produce *error de redondeo*.

2. [2 ptos] Sea $f(x) = x^3 - 4x - 1$ en el intervalo $[2, 3]$. Como f es continua y $f(2)f(3) < 0$, el **método de la bisección** aplicado en $[2, 3]$ con criterio de parada $|b_k - a_k| \leq 10^{-3}$ **garantiza** obtener un aproximado x de una raíz de f en $[2, 3]$ en a lo sumo **10** iteraciones.

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} f_1(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0, \\ f_2(x, y) = x^2 - y = 0, \end{cases} \quad \text{con } \mathbf{X}^{(0)} = (x_0, y_0) = (0.5, 0.2).$$

- (a.) [1.0 pto] Halle la fórmula del algoritmo del método de Newton para este sistema. Exprese explícitamente las componentes $x^{(k+1)}$ y $y^{(k+1)}$ en función de $x^{(k)}$ y $y^{(k)}$.

- (b.) [1.5 pto] Aplique el método de Newton a partir de $\mathbf{X}^{(0)} = (0.5, 0.2)$ y calcule $\mathbf{X}^{(1)}$ y $\mathbf{X}^{(2)}$, redondeando cada valor a 4 cifras decimales.

- (c.) **[0.5 pto]** Calcule el error relativo porcentual entre las dos últimas iteraciones. Indique si el método alcanzó una precisión relativa menor al 1 % después de dos iteraciones.

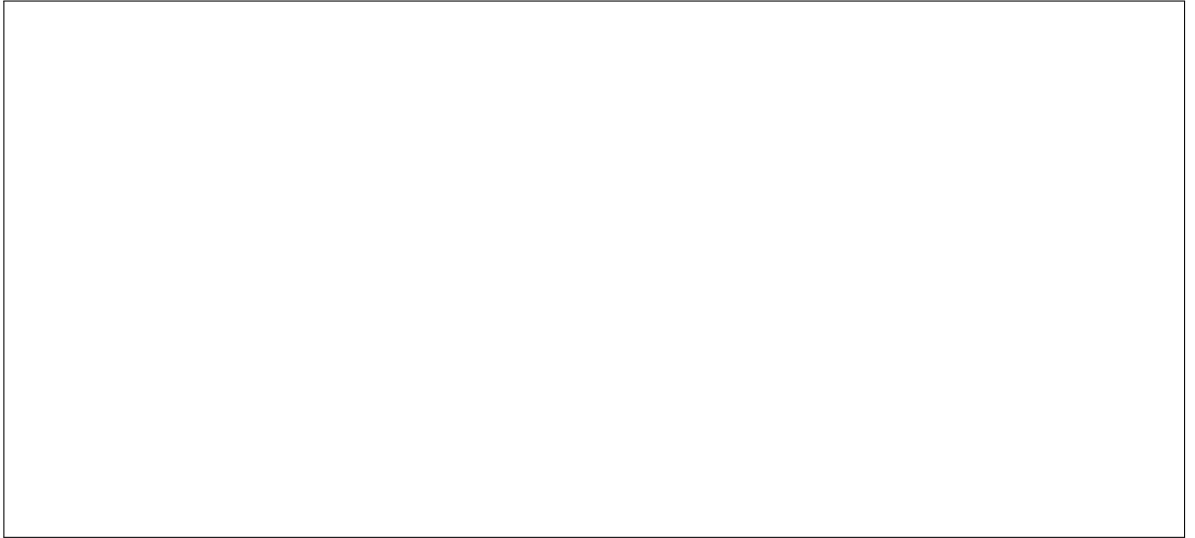
4. [3 ptos] Considere el sistema no lineal:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x + 5 = 0 \\ xy + 2x - 8y + 4 = 0 \end{cases}$$

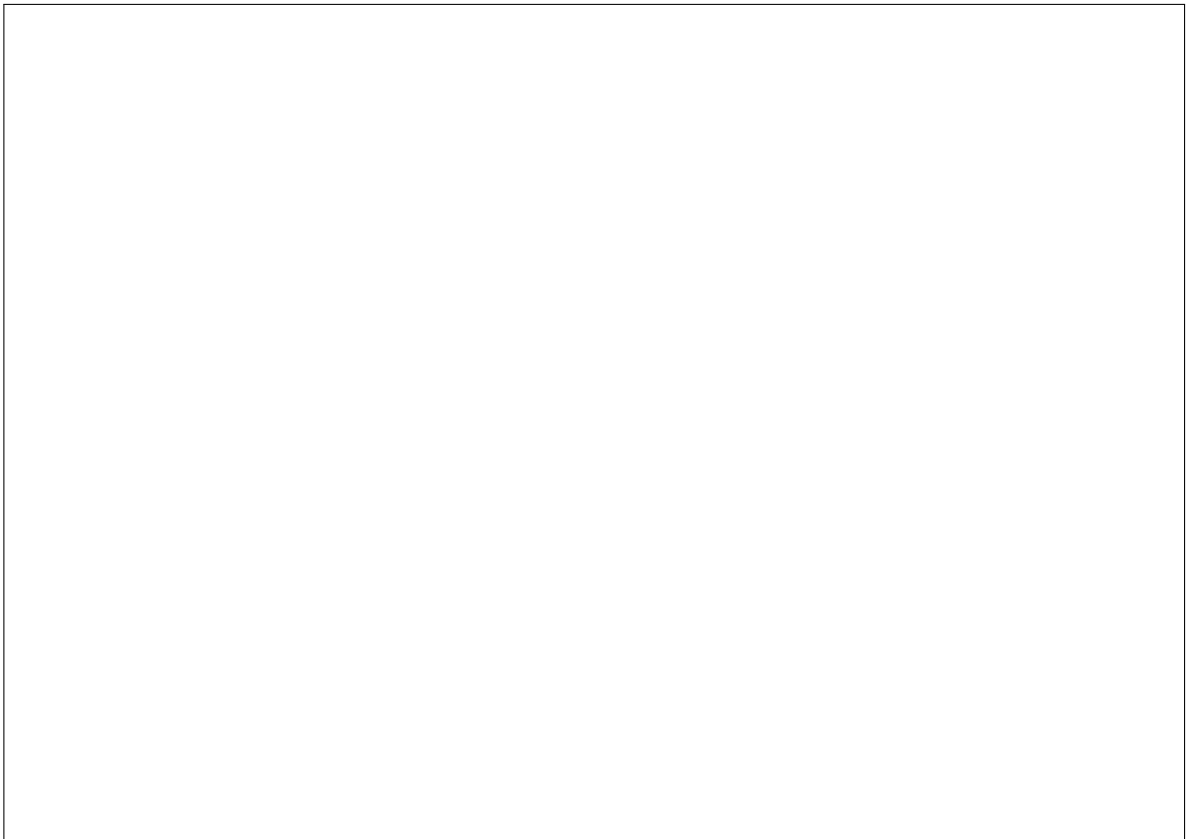
(a.) (0.5 pto) Utilizando el despeje más simple, reescriba el sistema en la forma:

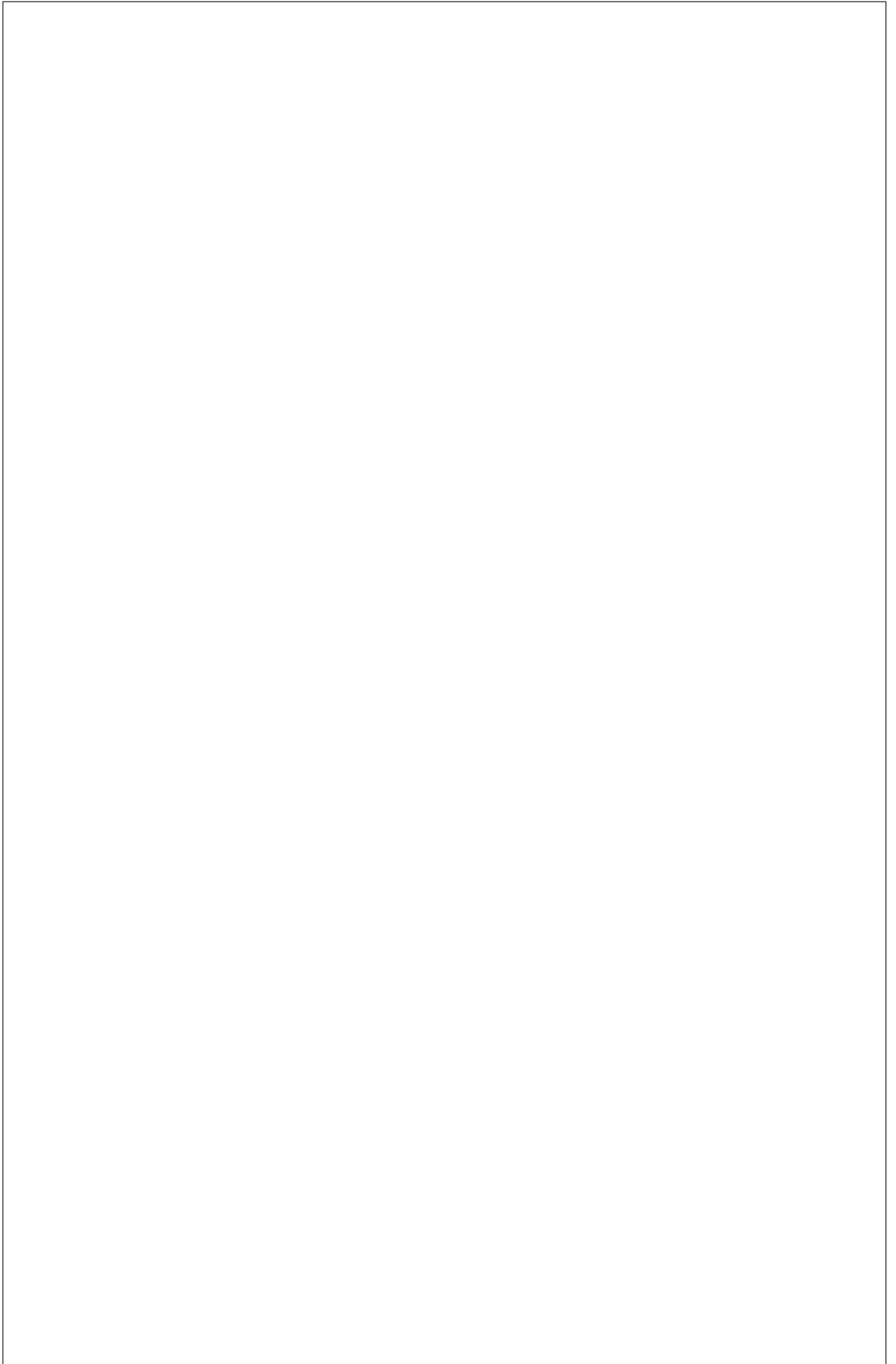
$$\mathbf{X} = \mathbf{G}(\mathbf{X}); \quad x = g_1(x, y), \quad y = g_2(x, y),$$

definiendo g_1 y g_2 adecuadas para aplicar una iteración de punto fijo.



(b.) (2 pto) Determine si se cumple el criterio de convergencia en el dominio $D = [0.78, 1.2] \times [0.78, 1.2]$





(c.) (**0.5 pto**) Aplique una iteración del método de punto fijo:

$$\mathbf{X}^{(k+1)} = \mathbf{G}(\mathbf{X}^{(k)}),$$

con $\mathbf{X}^{(0)} = (0.8, 0.8)$. Compare el resultado con el punto inicial a través del error relativo porcentual

APLICACIONES

5. [10 pts] Distribución de Temperatura en una Barra

Considere una barra delgada de longitud L , aislada lateralmente, cuya distribución estacionaria de temperatura $T(x)$ en el dominio $x \in [0, L]$ se modela mediante la ecuación diferencial ordinaria (EDO) de segundo orden con condiciones de frontera:

$$\frac{d^2T}{dx^2} - 5T = 100, \quad T(0) = 50^\circ\text{C}, \quad T(L) = 150^\circ\text{C}.$$

Fije $L = 1$ m y utilice una malla con $N = 3$ nodos interiores, T_1, T_2, T_3 .

- (a.) [3 pts] Calcule el tamaño de paso Δx , determine las posiciones x_i de los nodos interiores y discretice la EDO en $i = 1, 2, 3$ usando:

$$\left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2}.$$

Escriba el sistema lineal resultante $\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{b}$ para $\mathbf{T} = [T_1 \ T_2 \ T_3]^\top$, identificando claramente la matriz $\mathbf{A}$ y el vector columna $\mathbf{b}$



- (b.) [4 ptos] Resuelva el sistema anterior realizando **dos** iteraciones del método de Gauss–Seidel, con

$$\mathbf{T}^{(0)} = [60 \ 80 \ 120]^T.$$

Antes de sustituir valores, escriba las **fórmulas de recurrencia** algebraicas para $T_1^{(k+1)}, T_2^{(k+1)}, T_3^{(k+1)}$.



- (c.) [3 ptos] Indique si el método de Gauss–Seidel **converge** o **diverge** para este sistema, justificando su respuesta.

Formulario:

1. **Teoría de errores:** Sean las medidas $\tilde{x}_1$ y $\tilde{x}_2$ con incertidumbres $\Delta\tilde{x}_1$ y $\Delta\tilde{x}_2$ usadas para calcular $q = f(x_1, x_2)$ mediante la aproximación de Taylor para el caso de varias variables se puede estimar la incertidumbre $\Delta\tilde{q}$:

$$\Delta f(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \approx \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_1 + \left| \frac{\partial f}{\partial x_2}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \right| \cdot \Delta\tilde{x}_2$$

Observación: Esta es una idea para generalizar el caso a varias variables.

2. **Convergencia local del punto fijo (sistemas):** Sea $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función iterativa tal que $x = G(x)$. Si G es diferenciable en una vecindad de x^* y se cumple

$$\|J_G(x^*)\| < 1$$

donde J_G es la matriz jacobiana de G , entonces el método $x^{(k+1)} = G(x^{(k)})$ converge localmente a x^* .

3. **Métodos Iterativos:** Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

El esquema iterativo es

$$x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c$$

- Esquema iterativo de Gauss-Seidel:

$$T_{gs} = (D - L)^{-1}U, \quad c_{gs} = (D - L)^{-1}b$$

- Matriz diagonal estrictamente dominante (DED): La matriz A es DED por filas si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \text{para cada fila } i = 1, \dots, n$$

- Radio espectral de T ($\rho(T)$):

$$\rho(T) = \text{Max}\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } T\}$$

4. **Normas matriciales:** Para matrices A de orden $m \times n$ se tiene

$$\|A\|_{\infty} = \text{máx}\{\|a\|_1 : a \text{ fila de } A\},$$

donde $\|a\|_1 = \sum_{i=1}^n |a_i|$.