

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

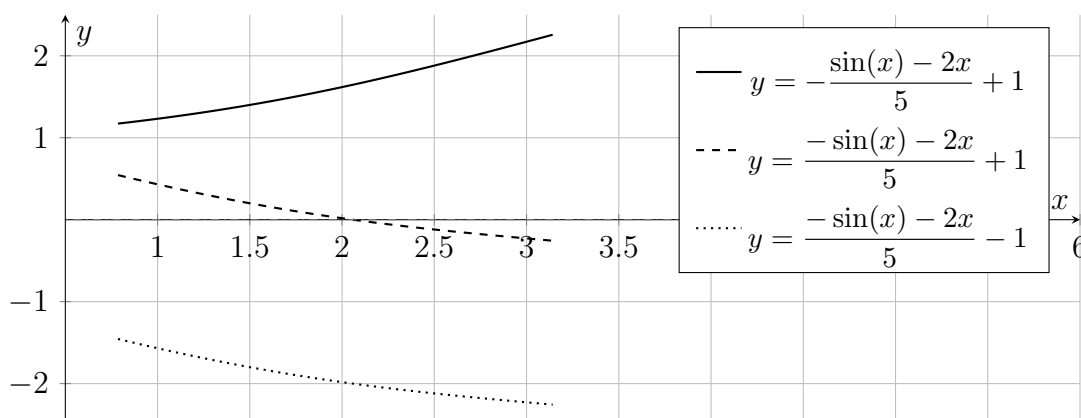
Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Sea la función $g(x) = \frac{\cos(x) - x^2 + 5x}{5} + 1$ escrita en forma de punto fijo. Como $g(x)$ cumple la condición de existencia en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$, el método iterativo $x_{n+1} = g(x_n)$ converge para todo $x^{(0)} \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$. (Obs: puede usar las gráficas adjuntas)



Solución

Como $g'(x) = \frac{-\sin(x) - 2x}{5} + 1$, del gráfico se deduce que

$$|g'(x)| \leq \frac{-\sqrt{2} - \pi}{10} + 1 < 1$$

Así, g cumple la condición de contracción. Por lo tanto, el método iterativo del punto fijo ($x_{n+1} = g(x_n)$) converge para cualquier punto semilla $x^{(0)} \in \left[\frac{\pi}{4}, \pi\right]$.

VERDADERO

2. [2 ptos] En el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} \sin(x + y) = 0 \\ x^2 - y^2 = 0 \end{cases}$$

el método de Newton converge hacia una solución del sistema para cualquier punto inicial $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(0)}$.

Solución

Si $F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \sin(x+y) \\ x^2 - y^2 \end{bmatrix}$, entonces

$$J_F\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \cos(x+y) & \cos(x+y) \\ 2x & -2y \end{bmatrix}$$

Luego, para $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ se tiene que $J_F(x^{(0)})$ es una matriz no invertible. Por lo tanto, no se puede aplicar el método de Newton para $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

FALSO

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] Una empresa fabrica envases cilíndricos para jugo. Las especificaciones del diseño son:

- Radio nominal: $r = 5 \text{ cm} \pm 0.01 \text{ cm}$
- Altura nominal: $h = 12 \text{ cm} \pm 0.25 \%$

Considerando $\pi = 3.1416$, se pide:

- a) [0.5 ptos] Calcule el volumen nominal en mL ($1 \text{ cm}^3 = 1 \text{ mL}$).
- b) [2 ptos] Determine el error absoluto en la estimación del volumen.
- c) [0.5 ptos] Determine el error relativo porcentual en la estimación del volumen.

Solución

- a) El volumen del envase lo denotaremos por $V = \pi r^2 h$. Entonces,

$$V = 942.4800 \text{ mL}$$

- b) Las derivadas parciales de V son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial r} &= 2\pi r h \\ \frac{\partial V}{\partial h} &= \pi r^2 \end{aligned}$$

Entonces, el error absoluto es

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial r} \right| \times 0.01 + \left| \frac{\partial V}{\partial h} \right| \times (0.25 \% \times 12)$$

$$\Delta V = 6.1261$$

- a) El error relativo porcentual es

$$\frac{\Delta V}{V} \times 100 \% = 0.6500 \%$$

4. [3 ptos] En una central hidráulica se desea expresar la eficiencia η de una turbina en función de la velocidad relativa de entrada al rotor V . Se obtuvieron los siguientes datos experimentales, y se agregó el punto (0,0) como condición adicional no experimental:

k	0	1	2	3
V	0	0.4	0.6	1
$\eta(V)$	0	0.6	0.8	0.6

- a. [2 pts] Determine los polinomios básicos de Lagrange $L_k(V)$ ($k = 0, 1, 2, 3$). No es necesario desarrollar o simplificar la expresión.

Solución

$$L_0(V) = \frac{(V - 0.4)(V - 0.6)(V - 1)}{(0 - 0.4)(0 - 0.6)(0 - 1)} = -\frac{(V - 0.4)(V - 0.6)(V - 1)}{0.2400}$$

$$L_1(V) = \frac{(V - 0)(V - 0.6)(V - 1)}{(0.4 - 0)(0.4 - 0.6)(0.4 - 1)} = \frac{V(V - 0.6)(V - 1)}{0.0480}$$

$$L_2(V) = \frac{(V - 0)(V - 0.4)(V - 1)}{(0.6 - 0)(0.6 - 0.4)(0.6 - 1)} = -\frac{V(V - 0.4)(V - 1)}{0.0480}$$

$$L_3(V) = \frac{(V - 0)(V - 0.4)(V - 0.6)}{(1 - 0)(1 - 0.4)(1 - 0.6)} = \frac{V(V - 0.4)(V - 0.6)}{0.2400}$$

- b. [1 pts] Construya el polinomio de interpolación de Lagrange. Luego estime el valor de $\eta(0.7)$.

Solución

El polinomio de interpolación de Lagrange es

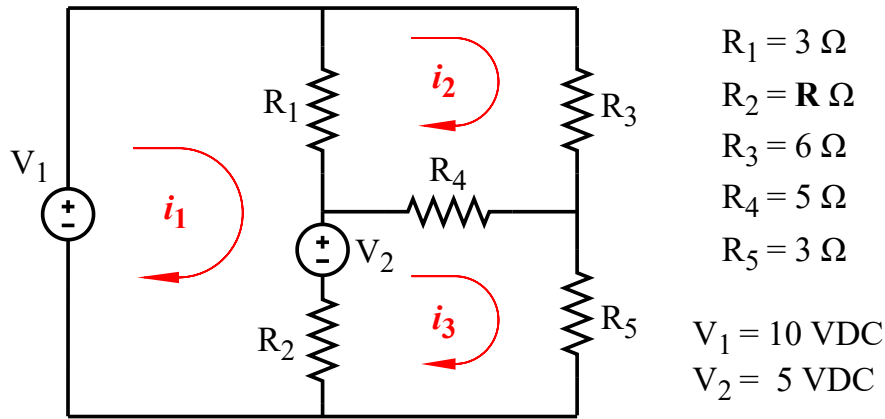
$$L(V) = 0 \times L_1(V) + 0.6 \times L_2(V) + 0.8 \times L_3(V) + 0.6 \times L_4(V)$$

$$L(V) = 12.5V(V - 0.6)(V - 1) - 16.6667V(V - 0.4)(V - 1) + 2.5V(V - 0.4)(V - 0.6)$$

Luego, $\eta(0.7) \approx 0.8400$

APLICACIONES

5. [10 ptos] Considere el circuito eléctrico mostrado en la figura, donde se muestran 2 fuentes de voltaje y 5 resistencias, una de las cuales tiene un valor desconocido R_2 .



- a) [4 ptos] Plantee las ecuaciones lineales en el orden de las corrientes y exprese el sistema SEL en la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para estimar el vector de corrientes $\mathbf{x} = [i_1 \ i_2 \ i_3]^T$ de tal manera que $b_1, b_2, b_3 \geq 0$. Luego indique (si existen) los valores de R para los cuales la matriz de coeficientes es diagonal estrictamente dominante.

Solución

Primera malla:

$$(3 + R)i_1 - 3i_2 - Ri_3 = 5$$

Segunda malla:

$$-3i_1 + 14i_2 - 5i_3 = 0$$

Tercera malla:

$$-Ri_1 - 5i_2 + (8 + R)i_3 = 5$$

Matricialmente

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 3+R & -3 & -R \\ -3 & 14 & -5 \\ -R & -5 & 8+R \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}}_{\mathbf{b}}$$

Como $|-3| + |-R| \geq |3+R|$ para cualquier valor de R , entonces la matriz de coeficientes no puede ser diagonal estrictamente dominante, sin importar el valor de R .

- b) [3 ptos] Considerando el valor de $R = 2 \, \Omega$, determine la matriz y el vector de iteraciones del método de Gauss-Seidel. Luego halle el radio espectral y concluya sobre la convergencia del método iterativo.

Solución

Para $R = 2\Omega$, la matriz de coeficientes es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -3 & 14 & -5 \\ -2 & -5 & 10 \end{bmatrix}$$

Luego, la matriz y vector de Gauss-Seidel es

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 14 & 0 \\ -2 & -5 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0.6000 & 0.4000 \\ 0 & 0.1286 & 0.4429 \\ 0 & 0.1843 & 0.3014 \end{bmatrix}$$

$$c_{gs} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & 14 & 0 \\ -2 & -5 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.2143 \\ 0.8071 \end{bmatrix}$$

El polinomio característico de T_{gs} es $p(\lambda) = -\lambda^3 + 0.43\lambda^2 + 0.0429\lambda$. Luego, los valores propios de T_{gs} son $\lambda_1 = -0.0835$, $\lambda_2 = 0$ y $\lambda_3 = 0.5135$, entonces $\rho(T_{gs}) = 0.5135$. Por lo tanto, el método iterativo de Gauss-Seidel converge.

- c) [3 ptos] Realice 2 iteraciones del método de Gauss-Seidel usando el punto semilla $\mathbf{x}^{(0)} = [3 \quad 1 \quad 1.5]^T$. Entregue como respuesta los valores de $\mathbf{x}^{(1)}$ y $\mathbf{x}^{(2)}$.

Solución

Primera iteración:

$$\mathbf{x}^{(1)} = T_{gs}\mathbf{x}^{(0)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 2.2000 \\ 1.0071 \\ 1.4436 \end{bmatrix}$$

Segunda iteración:

$$\mathbf{x}^{(2)} = T_{gs}\mathbf{x}^{(1)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 2.1817 \\ 0.9831 \\ 1.4279 \end{bmatrix}$$