

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Dado el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}\ln(x^2 - y^2 + 7) &= 2 \\ xe^y &= 1\end{aligned}$$

Al transformar en las formas de punto fijo siguientes:

$$x = \sqrt{y^2 + e^2 - 7} \quad , \quad y = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$$

Se garantiza la convergencia del método de punto fijo con un punto semilla $(x^{(0)}, y^{(0)})$ dentro del dominio $D = \{(x, y) \mid 0.5 \leq x \leq 1 \quad ; \quad 0.5 \leq y \leq 1\}$.

Solución

El esquema de punto fijo planteado define la función iterativa $G(x, y) = \left(\sqrt{y^2 + e^2 - 7}, \ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)$ en el dominio

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0.5 \leq x \leq 1, 0.5 \leq y \leq 1\}.$$

Una condición necesaria para la convergencia del método es la condición de existencia; es decir, que $g(D) \subseteq D$. Sin embargo, esto no se cumple pues:

- $(1, 1)$ es un punto de D ,
- $G(1, 1) = (\sqrt{e^2 - 6}, \ln(1)) \approx (1.1786, 0)$ no es un punto de D .

Conclusión: g no mapea D en sí mismo, por lo tanto no se garantiza la convergencia del método de punto fijo. La afirmación es **falsa**.

2. [2 ptos] Considere el sistema lineal dependiente del parámetro a :

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Indique si la afirmación siguiente es **verdadera (V)** o **falsa (F)**:

Si $a > 2$, entonces la matriz de iteración de Jacobi del sistema cumple $\rho(T_j) < 1$.

Solución

Consideremos $a > 2$, se verifica que la matriz del sistema lineal es *diagonal estrictamente dominante*. Veamos ello, en cada fila de

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & a & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

se cumple que el elemento de la diagonal domina al resto:

$$\begin{array}{lcl} |4| & > & |-1| + |0| \\ |a| & > & |-1| + |-1| \\ |4| & > & |0| + |-1| \end{array}$$

Luego, como la matriz del sistema lineal es *diagonal estrictamente dominante* entonces el método iterativo de Jacobi es convergente.

Finalmente, como el método iterativo de Jacobi es convergente entonces

$$\rho(T_j) < 1.$$

Conclusión: Si $a > 2$ se garantiza que $\rho(T_j) < 1$. La afirmación es **verdadera**.

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] Una empresa desea minimizar el costo de producción $C(x)$ de cierto componente mecánico, donde x representa la cantidad de materia prima utilizada. El modelo para el costo total es:

$$C(x) = ax^2 + \frac{b}{x}$$

donde a y b son parámetros determinados experimentalmente. Se ha demostrado que el valor que minimiza el costo está dado por:

$$x^* = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/3}$$

Los parámetros presentan incertidumbre relativa porcentual: $a = 1.0 \pm 10\%$, $b = 8.0 \pm 20\%$. Halle el **error relativo porcentual en x^*** debido a la propagación de errores en a y b .

Solución

Dado el modelo $x^* = \left(\frac{b}{2a}\right)^{1/3}$ con incertidumbres relativas:

$$\frac{\Delta a}{a} = 10\%, \quad \frac{\Delta b}{b} = 20\%$$

Por la fórmula general de propagación de errores para funciones de varias variables:

$$\frac{\Delta x^*}{|x^*|} \approx \frac{\left|\frac{\partial x^*}{\partial a}\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{\partial x^*}{\partial b}\right| \cdot \Delta b}{|x^*|}$$

Calculamos derivadas parciales:

$$\frac{\partial x^*}{\partial a} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^{-2/3} \cdot \left(-\frac{b}{2a^2}\right) = -\frac{1}{3a} \cdot x^*,$$

$$\frac{\partial x^*}{\partial b} = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{b}{2a}\right)^{-2/3} \cdot \left(\frac{1}{2a}\right) = \frac{1}{3b} \cdot x^*.$$

Sustituimos:

$$\frac{\Delta x^*}{|x^*|} \approx \frac{\left|-\frac{1}{3a} \cdot x^*\right| \cdot \Delta a + \left|\frac{1}{3b} \cdot x^*\right| \cdot \Delta b}{|x^*|} = \frac{1}{3} \left(\frac{\Delta a}{|a|} + \frac{\Delta b}{|b|}\right)$$

Finalmente:

$$\frac{\Delta x^*}{|x^*|} \approx \frac{1}{3}(0.10 + 0.20) = \boxed{0.10 \text{ o bien } 10\%}$$

Conclusión: El error relativo porcentual en x^* debido a las incertidumbres en a y b es del $\boxed{10\%}$.

4. [3 ptos] Durante un ensayo experimental en un canal hidráulico, se registró la velocidad superficial del flujo V (en m/s) para distintas profundidades del agua h (en metros). Los resultados se presentan en la siguiente tabla:

h (m)	0	0.2	0.4	0.6
V (m/s)	0.0	0.4	0.8	0.8

Utilizando el método de **interpolación de Lagrange**, determine el polinomio interpolante de grado 3, $P_3(h)$, que represente la velocidad V como función de la profundidad h . Luego, use dicho polinomio para estimar la velocidad del flujo cuando la profundidad sea $h = 0.5$ m.

Solución

Queremos hallar el polinomio interpolante de Lagrange de grado 3, $P_3(h)$, y usarlo para estimar $V(0.5)$.

El polinomio interpolante es:

$$P_3(h) = V_0 \cdot L_0(h) + V_1 \cdot L_1(h) + V_2 \cdot L_2(h) + V_3 \cdot L_3(h) = 0.4 \cdot L_1(h) + 0.8 \cdot L_2(h) + 0.8 \cdot L_3(h)$$

Note que solo basta hallar los siguientes polinomios básicos de Lagrange:

$$\begin{aligned} L_1(h) &= \frac{(h-0)(h-0.4)(h-0.6)}{(0.2-0)(0.2-0.4)(0.2-0.6)} = \frac{h(h-0.4)(h-0.6)}{0.016}, \\ L_2(h) &= \frac{(h-0)(h-0.2)(h-0.6)}{(0.4-0)(0.4-0.2)(0.4-0.6)} = \frac{h(h-0.2)(h-0.6)}{-0.016}, \\ L_3(h) &= \frac{(h-0)(h-0.2)(h-0.4)}{(0.6-0)(0.6-0.2)(0.6-0.4)} = \frac{h(h-0.2)(h-0.4)}{0.048}. \end{aligned}$$

Evaluyendo en $h = 0.5$:

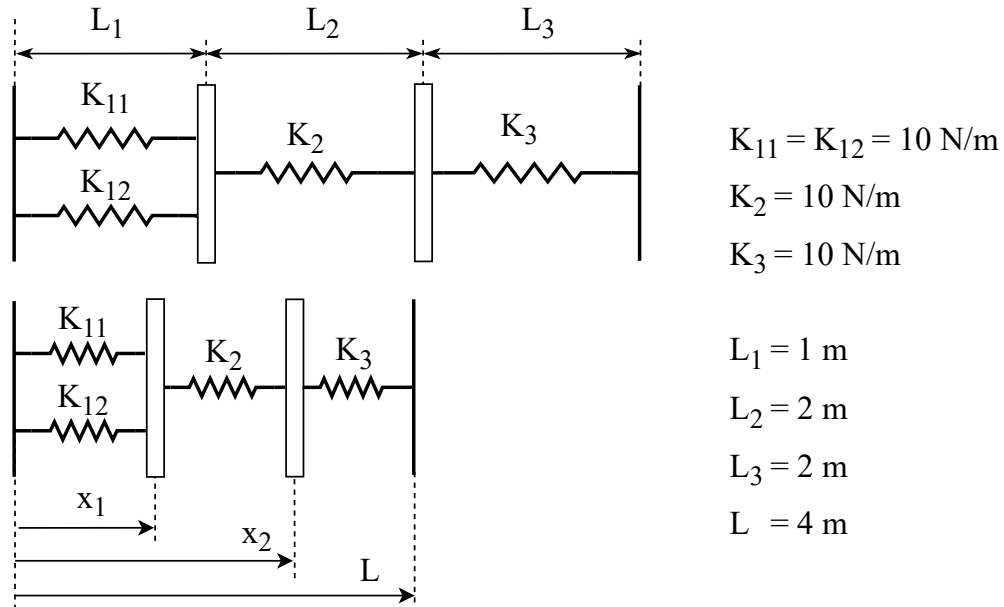
$$\begin{aligned} P_3(0.5) &= 0.4 \cdot \frac{0.5(0.1)(-0.1)}{0.016} + 0.8 \cdot \frac{0.5(0.3)(-0.1)}{-0.016} + 0.8 \cdot \frac{0.5(0.3)(0.1)}{0.048} \\ &= -0.125 + 0.75 + 0.25 = 0.875 \end{aligned}$$

Conclusión: la velocidad estimada para $h = 0.5$ m es:

$V(0.5) \approx 0.875$

APLICACIONES

5. [10 pts] Cuatro resortes con distintas constantes elásticas forman un sistema mixto en serie y paralelo. Tras comprimirse, la distancia total entre los extremos es $L = 4$ m. Se requiere estimar las posiciones intermedias x_1 y x_2 en equilibrio (ver imagen siguiente).



- a) [4 pts] A partir del equilibrio estático, plantee el sistema de ecuaciones lineales que permite determinar las posiciones x_1 y x_2 . Luego, exprese el SEL en la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para estimar el vector de posiciones $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^T$, de manera que los valores de a_{21} y a_{12} sean negativos.

Solución

Por equilibrio de fuerzas en cada nodo se sigue:

- En el nodo 1:

$$k_{11}(L_1 - x_1) + k_{12}(L_1 - x_1) = k_2(L_2 - (x_2 - x_1))$$

$$10(1 - x_1) + 10(1 - x_1) = 10(2 - (x_2 - x_1))$$

$$3x_1 - x_2 = 0$$

- En el nodo 2:

$$k_2(L_2 - (x_2 - x_1)) = k_3(L_3 - (L - x_2))$$

$$10(2 - (x_2 - x_1)) = 10(2 - (4 - x_2))$$

$$-x_1 + 2x_2 = 4$$

Expresando en forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$: $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$

- b) [3 ptos] Analice el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss-Seidel. En base al resultado de dicho análisis indique claramente si converge o diverge.

Solución

Del ítem anterior se tiene que $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ efectuando la descomposición se tiene:

$$A = D - L - U, \text{ con } D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad L = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Luego,

- $D - L = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ con inversa $(D - L)^{-1} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/6 & 1/2 \end{bmatrix}$.
- $T_{gs} = (D - L)^{-1}U = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 \\ 0 & 1/6 \end{bmatrix}$ con valores propios $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1/6$, pues es una matriz triangular superior.

Finalmente, como el radio espectral cumple $\rho(T_{gs}) = \frac{1}{6} < 1$ se garantiza que el método converge.

- c) [3 ptos] Halle la matriz y el vector de iteración de Gauss-Seidel. Luego, determine la solución usando el punto semilla $\mathbf{x}^{(0)} = [0.5 \quad 2.5]^T$ y una tolerancia de 0.05.

Solución

Del ítem anterior se tiene:

$$T_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3333 \\ 0 & 0.1667 \end{bmatrix}, c_{gs} = (D - L)^{-1}b = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Iterando:

- $\mathbf{x}^{(1)} = T_{gs}\mathbf{x}^{(0)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3333 \\ 0 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.5 \\ 2.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8333 \\ 2.4167 \end{bmatrix}$, con error $\delta^{(1)} = \frac{\|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(0)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}^{(1)}\|_{\infty}} = 0.1379$.
- $\mathbf{x}^{(2)} = T_{gs}\mathbf{x}^{(1)} + c_{gs} = \begin{bmatrix} 0 & 0.3333 \\ 0 & 0.1667 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.8333 \\ 2.4167 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8056 \\ 2.4028 \end{bmatrix}$, con error $\delta^{(2)} = \frac{\|\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(1)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{x}^{(2)}\|_{\infty}} = 0.0116$.

como el error relativo en la última iteración es menor que la tolerancia 0.05, paramos.