

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] La raíz de la función $f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sin(x)}$ puede calcularse mediante el método de Newton–Raphson partiendo de cualquier valor inicial $x_0 \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right]$.

Solución

Considere la función:

$$f(x) = \frac{x^2 + 5}{\sin(x)}$$

Para que $f(x) = 0$, el numerador debe ser cero y el denominador distinto de cero. El numerador es:

$$x^2 + 5$$

Este polinomio es estrictamente positivo para todo $x \in \mathbb{R}$, ya que $x^2 \geq 0$ y, por tanto, $x^2 + 5 > 0$. Por lo tanto, la función $f(x)$ no tiene raíces reales.

El intervalo considerado es:

$$x_0 \in \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \approx [2.09, 4.19]$$

Dentro de este intervalo, se encuentra el punto $x = \pi \approx 3.14$, en el cual $\sin(x) = 0$. Esto implica que la función $f(x)$ tiene una discontinuidad en $x = \pi$, ya que el denominador se anula y $f(x) \rightarrow \infty$. La función $f(x)$ no tiene raíces reales y además presenta una discontinuidad dentro del intervalo dado. Por lo tanto, el método de Newton–Raphson no puede garantizar la convergencia a una raíz partiendo de cualquier valor inicial en ese intervalo.

FALSO

2. [2 ptos] Un estudiante del curso de métodos numéricos, afirma lo siguiente: **El polinomio interpolante de Lagrange siempre proporciona una aproximación más precisa que el polinomio interpolante de Newton para un mismo conjunto de datos, debido a su forma algebraica explícita.**

Solución

Ambos métodos, Lagrange y Newton, generan exactamente el mismo polinomio interpolante cuando se utilizan los mismos puntos de interpolación. Esto significa que:

$$P_{\text{Lagrange}}(x) = P_{\text{Newton}}(x) \quad \text{para todo } x$$

Por lo tanto, **la precisión de la aproximación es la misma** en ambos casos. La diferencia entre ellos radica únicamente en su forma algebraica y en su eficiencia computacional:

- El **polinomio de Lagrange** se expresa como una combinación de polinomios base, lo que puede dificultar la incorporación de nuevos puntos sin recalcular toda la expresión.
- El **polinomio de Newton**, gracias a su forma recursiva (con diferencias divididas), permite una actualización más eficiente al agregar nuevos datos.

Finalmente, la afirmación es incorrecta. Ambos métodos generan el mismo polinomio interpolante y, por lo tanto, tienen la misma precisión. La forma algebraica no afecta la calidad de la aproximación, sino solo la conveniencia computacional.

FALSO

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] Halle el número real a la cual representa la secuencia de bits:

00111010000110111000000000000000

muestre de manera ordenada cada uno de sus pasos

Solución

Dada la secuencia de 32 bits:

00111010000110111000000000000000

División de campos:

$\underbrace{0}_{\text{signo}} \quad \underbrace{01110100}_{\text{exponente}} \quad \underbrace{001101110000000000000000}_{\text{mantisa}}$

- **Signo:** $0 \Rightarrow$ número positivo.
- **Exponente:** $01110100_2 = 116$, entonces $116 - 127 = -11$.
- **Mantisa:** se interpreta como el valor fraccionario:

$$1 + 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3} + 1 \cdot 2^{-4} + 0 \cdot 2^{-5} + 1 \cdot 2^{-6} + 1 \cdot 2^{-7} + 1 \cdot 2^{-8} = 1 + 0.21484375$$

$$\Rightarrow 1.21484375$$

Valor final:

$$(+1) \times 1.21484375 \times 2^{-11} = \frac{1.21484375}{2048} \approx \boxed{0.0005934238}$$

4. [3 ptos] Dado el sistema de ecuaciones no lineales

$$\begin{cases} 0.3 y^3 - 200 \sin(0.5 x) - 700 = 0, \\ 0.1 y^3 - 20 x \sin(x^{1/5}) = 0, \end{cases}$$

A partir de ello, se construye el proceso iterativo para la aplicación del método del punto fijo, que tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(n+1)} = G \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(n)} \right) = \begin{bmatrix} \frac{0.1 (y^{(n)})^3}{a \sin((x^{(n)})^{1/5})} \\ \left(\frac{200 \sin(0.5 x^{(n)}) + 700}{0.3} \right)^b \end{bmatrix}$$

para $n = 0; 1; 2; 3; \dots$, tomando como punto semilla o inicial: $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(0)} = \begin{bmatrix} 19 \\ 14 \end{bmatrix}$

a) [0.5 pts] Determine las constantes a y b

Solución

De la segunda ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} 0.1 y^3 - 20 x \sin(x^{1/5}) &= 0 \rightarrow 20 x \sin(x^{1/5}) = 0.1 y^3 \\ \rightarrow x &= \frac{0.1 y^3}{20 \sin(x^{1/5})} \end{aligned}$$

De la primera ecuación del sistema:

$$\begin{aligned} 0.3 y^3 - 200 \sin(0.5 x) - 700 &= 0 \rightarrow 0.3 y^3 = 200 \sin(0.5 x) + 700 \\ \rightarrow y &= \left(\frac{200 \sin(0.5 x) + 700}{0.3} \right)^{1/3} \end{aligned}$$

Luego, el proceso iterativo para la aplicación del método del punto fijo tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(n+1)} = G \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(n)} \right) = \begin{bmatrix} \frac{0.1 (y^{(n)})^3}{20 \sin((x^{(n)})^{1/5})} \\ \left(\frac{200 \sin(0.5 x^{(n)}) + 700}{0.3} \right)^{1/3} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, $a = 20$ y $b = 1/3$.

b) [2.5 pts] Halle la aproximación $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(2)}$ tras la segunda iteración y estime el error relativo en esta iteración utilizando la norma infinita.

Solución

Iteración 1:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(1)} = g \left(\begin{bmatrix} 19 \\ 14 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 14.0950 \\ 13.1679 \end{bmatrix}$$

Error relativo=0.3480.

Iteración 2:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}^{(2)} = g \left(\begin{bmatrix} 14.0950 \\ 13.1679 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 11.5084 \\ 14.0857 \end{bmatrix}$$

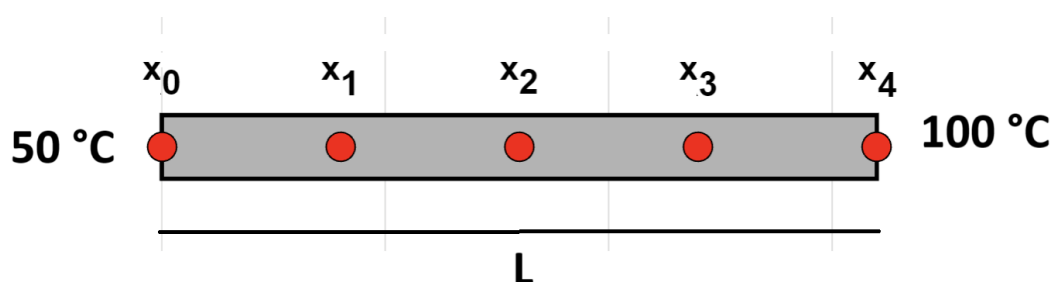
Error relativo=0.1836.

APLICACIONES

5. [10 pts] [Modelado de la Distribución de Temperatura en una Barra Metálica]

Cuando se diseñan sistemas térmicos o se intenta optimizar las aletas de enfriamiento es necesario conocer la distribución de temperaturas $T(x)$ a lo largo de una barra metálica de longitud L sujeta a:

- **Conducción de calor** a lo largo de la barra.
- **Convección** en la superficie lateral (pérdida de calor al ambiente).
- **Condiciones de frontera fijas** (sin derivadas en los extremos).



El modelo matemático está representado por la ecuación de balance de energía el cual incluye un término de primera derivada (velocidad de convección):

$$\frac{d^2T}{dx^2} - \alpha \frac{dT}{dx} - \beta T = 0,$$

donde:

- $\alpha = 10$ (coeficiente de acoplamiento convectivo en m^{-1}),
- $\beta = 50$ (coeficiente de generación de calor en m^{-2}),
- $L = 1.6$ (longitud de la barra en m)

Con el objeto de discretizar el modelo matemático dividimos la barra en 4 partes iguales, destacando sobre ella 5 puntos denotados por x_0, x_1, x_2, x_3 y x_4 , tal como se muestra en la gráfica, en este caso $\Delta x = \frac{L}{4} = 0.4$, asimismo las derivadas son discretizadas según:

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x_i} \approx \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} \quad ; \quad \left. \frac{d^2T}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

- a) [4 pts] Discretice la ecuación diferencial que describe la temperatura $T(x_i)$ a partir de su aproximación T_i , deduzca una ecuación en diferencias y luego simplifíquela de tal manera que tome la forma:

$$mT_{i-1} - nT_i - T_{i+1} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3$$

con m y n enteros positivos.

Solución

Discretizando la ecuación diferencial se obtiene

$$\frac{T_{i+1} - 2T_i + T_{i-1}}{(\Delta x)^2} - \alpha \frac{T_{i+1} - T_{i-1}}{2\Delta x} - \beta T_i = 0$$

Agrupando convenientemente:

$$\left(\frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{\alpha}{2\Delta x} \right) T_{i-1} - \left(\frac{2}{(\Delta x)^2} + \beta \right) T_i - \left(\frac{\alpha}{2\Delta x} - \frac{1}{(\Delta x)^2} \right) T_{i+1} = 0$$

Reemplazando los valores numéricos de $\alpha = 10$, $\beta = 50$ y $\Delta x = 0.4$ se obtiene:

$$18.75T_{i-1} - 62.5T_i - 6.25T_{i+1} = 0$$

Equivalentemente,

$$3T_{i-1} - 10T_i - T_{i+1} = 0$$

- b) [3 ptos] Luego de plantear el sistema de ecuaciones y hallar la formulación matricial de la forma $AT = b$, utilice algún criterio de convergencia para deducir si el método iterativo de Jacobi converge o diverge

Solución

Usando las condiciones de frontera $T_0 = 50$ y $T_4 = 100$, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} 10T_1 + T_2 = 3T_0 = 150 \\ 3T_1 - 10T_2 - T_3 = 0 \\ 3T_2 - 10T_3 = T_4 = 100 \end{cases}$$

Matricialmente,

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -10 & -1 & 0 \\ 3 & -10 & -1 \\ 0 & 3 & -10 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} -150 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}}_b$$

Se observa que la matriz A es **diagonal estrictamente dominante**, entonces el método iterativo de Jacobi **converge**.

- c) [3 ptos] En caso haya convergencia del método de Jacobi por cualquier criterio realice dos iteraciones iniciando en el punto semilla $T^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. En caso no haya

convergencia determine la matriz de iteración de Jacobi

Solución

El proceso iterativo de Jacobi es:

$$\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}^{(n+1)} = \begin{bmatrix} 0 & -0.1 & 0 \\ 0.3 & 0 & -0.1 \\ 0 & 0.3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix}^{(n)} + \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ -10 \end{bmatrix}$$

Iteración 1:

$$T_1^{(1)} = 15$$

$$T_2^{(1)} = 0.2$$

$$T_3^{(1)} = -10$$

Iteración 2:

$$T_1^{(2)} = 14.98$$

$$T_2^{(2)} = 5.5$$

$$T_3^{(2)} = -9.94$$

Formulario:

1. Polinomio interpolante de Lagrange:

$$\boxed{P_n(x) = \sum_{k=0}^n f(x_k) L_k(x)}, \quad L_k(x) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq k}} \frac{(x - x_j)}{(x_k - x_j)}$$

Aquí los polinomios básicos cumplen las propiedades:

$$L_k \text{ es un polinomio de grado } n \text{ y } L_k(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k = j \\ 0 & \text{si } k \neq j \end{cases}$$

2. Polinomio interpolante de Newton:

$$\boxed{P_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^n f[x_0, \dots, x_k](x - x_0) \cdots (x - x_{k-1})}$$

Aquí las diferencias divididas satisfacen:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \begin{cases} f(x_i) & \text{si } k = 0 \\ \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i} & \text{si } k = 1, 2, \dots, n \end{cases}$$

3. Métodos Iterativos: Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

El esquema iterativo es

$$\boxed{x^{(k+1)} = Tx^{(k)} + c}$$

■ Esquema iterativo de Jacobi:

$$T_j = D^{-1}(L + U), \quad c_j = D^{-1}b$$

■ Matriz diagonal estrictamente dominante (DED): La matriz A es DED por filas si

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|, \quad \text{para cada fila } i = 1, \dots, n$$

■ Radio espectral de T ($\rho(T)$):

$$\rho(T) = \text{Max}\{|\lambda| : \lambda \text{ es valor propio de } T \text{ (Matriz de iteración)}\}$$

4. Aritmética del punto flotante: Todo número real $x \neq 0$ puede escribirse

$$x = \pm (1.d_1d_2 \dots d_k \dots)_2 \times 2^{E_x}$$

Un sistema de punto flotante se especifica por la base 2, el largo de la mantisa p , y límites para los exponentes de L y U .

El punto flotante de $x \neq 0$, en base 2 tiene la forma:

$$fl(x) = \pm (1.d_1d_2 \dots d_p)_2 \times 2^E$$

donde $d_1d_2 \dots d_p$ es la mantisa, el 1er bit de la mantisa es implícito, y E es el exponente externo (entero en base 10)

Se define el sistema de punto flotante F con cuatro elementos

$$F(2, p, L, U) = F(\text{base}, \text{precision}, \text{expomin}, \text{expomax}) \rightarrow L \leq E \leq U$$

5. Fórmula del método de Newton - Raphson: Usar:

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

considerando $f'(x_i) \neq 0$ y criterio de parada al **error relativo**.

6. Métodos Iterativos: Sea el sistema $Ax = b$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & 0 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- Esquema iterativo de Jacobi:

$$x^{(k+1)} = D^{-1}(L + U)x^{(k)} + D^{-1}b$$

donde $T_j = D^{-1}(L + U)$, es la **matriz de iteración de Jacobi** y $c_j = D^{-1}b$ es el **vector de Jacobi**.

- Matriz diagonal estrictamente dominante: Una Matriz A es diagonal estrictamente dominante por filas si para cada fila $i = 1, \dots, n$:

$$|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

- Radio espectral de T ($\rho(T)$): $\rho(T) = \text{Max}\{|\lambda|\}$, λ es valor propio de T .

7. Errores producidos en la iteración: Para nuestro examen usaremos:

$$E_r = \frac{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|_\infty}{\|x^{(k+1)}\|_\infty}.$$