

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas (V)** o **Falsas (F)**. En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Se presentan dos secuencias de bits que representan números reales en formato IEEE 754 precisión simple (A) y precisión doble (B):

■ **A:** 1 10000011 101100000000000000000000

■ **B:** 1 10000000011 101100

Indique si la afirmación siguiente es **verdadera (V)** o **falsa (F)**:

Las dos representaciones corresponden al mismo número real.

Solución

Ambas representaciones IEEE 754, corresponde a número normalizado y válido dado por:

$$(-1)^s \times 1.f \times 2^{e-\text{BIAS}}$$

Note que el signo y la mantisa van a coincidir por ello analizamos el exponente.

A (simple):

$$e = 10000011_2 = 131, \quad \text{BIAS} = 127 \Rightarrow E_{\text{ext}} = e - \text{BIAS} = 4$$

B (doble):

$$e = 10000000011_2 = 1027, \quad \text{BIAS} = 1023 \Rightarrow E_{\text{ext}} = e - \text{BIAS} = 4$$

Conclusión: Ambas representaciones equivalen a un mismo número.

2. [2 ptos] Se sabe que para el conjunto de puntos $(1, 5)$, $(3, 8)$ y $(-2, 0)$ existe un único polinomio interpolante de grado 2 a lo más. Sean $L(x)$ y $N(x)$ las formas de Lagrange y Newton para dicho polinomio interpolante, además sean $L_0(x)$, $L_1(x)$ y $L_2(x)$ los polinomios básicos de Lagrange entonces:

$$L_0(-2) + L_1(1) + L_2(3) + L(3) + N(1) = 12$$

Solución

Se da el conjunto de puntos $(x_0, y_0) = (1, 5)$, $(x_1, y_1) = (3, 8)$ y $(x_2, y_2) = (-2, 0)$. Se sabe que existe un único polinomio interpolante de grado a lo más 2 que pasa por estos tres puntos.

Sean:

- $L(x)$: forma de Lagrange del polinomio interpolante.
- $N(x)$: forma de Newton del mismo polinomio.
- $L_0(x), L_1(x), L_2(x)$: polinomios básicos de Lagrange.

Aclaración: El orden de los puntos no afecta la forma del polinomio interpolante ni los valores evaluados, siempre que se respeten los pares (x_i, y_i) . Por lo tanto, no es necesario ordenar los puntos por el valor de x .

Evaluaciones de los polinomios básicos de Lagrange:

- $L_0(-2) = L_0(x_2) = 0$.
- $L_1(1) = L_1(x_0) = 0$.
- $L_2(3) = L_2(x_1) = 0$.

Evaluaciones del polinomio interpolante:

- $L(3) = 8$, ya que interpola el punto $(3, 8)$.
- $N(1) = 5$, ya que interpola el punto $(1, 5)$.

Evaluación de la expresión:

$$L_0(-2) + L_1(1) + L_2(3) + L(3) + N(1) = 0 + 0 + 0 + 8 + 5 = 13$$

Conclusión: La afirmación es **falsa**, pues el valor correcto es 13, no 12.

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] En un tanque cerrado se descarga agua a través de un orificio circular ubicado en su base. El caudal volumétrico medido es $Q = 0.04 \text{ m}^3/\text{s}$, con un coeficiente de descarga $C_d = 0.62$, un área de orificio $A = 0.01 \text{ m}^2$ y una aceleración de la gravedad $g = 9.81 \text{ m/s}^2$. El comportamiento del sistema se describe mediante el siguiente modelo:

$$Q = C_d A \sqrt{2g \left(h - \frac{Q^2}{2gA^2} \right)}$$

Utilice el método de Newton-Raphson para determinar la altura h del nivel del agua sobre el orificio, partiendo de $h_0 = 3 \text{ m}$ y con una tolerancia de 0.001.

Solución

Se identifica la ecuación no lineal

$$f(h) = C_d A \sqrt{2g \left(h - \frac{Q^2}{2gA^2} \right)} - Q = 0.$$

El esquema iterativo es

$$h_{k+1} = h_k - \frac{f(h_k)}{f'(h_k)} \quad \text{con} \quad f'(h) = \frac{C_d A g}{\sqrt{2g \left(h - \frac{Q^2}{2gA^2} \right)}}.$$

Iteración 1: $h_0 = 3.0$

$$f(h_0) = 0.0062 \cdot \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot \left(3.0 - \frac{0.0016}{0.001962} \right)} - 0.04 \approx 0.000590$$

$$f'(h_0) \approx \frac{0.0062 \cdot 9.81}{\sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot \left(3.0 - \frac{0.0016}{0.001962} \right)}} = 0.009290$$

$$h_1 = 3.0 - \frac{0.000590}{0.009290} \approx 2.9365, \quad \text{con error relativo} \approx \frac{0.0625}{2.9365} \approx 0.0216.$$

Iteración 2:

$$f(h_1) \approx -0.000004, \quad f'(h_1) \approx 0.009428$$

$$h_2 = 2.9365 - \frac{-0.000004}{0.009428} \approx 2.9370, \quad \text{con error relativo} \approx 0.0002.$$

Como el error relativo es menor a 0.001 nos detenemos.

Conclusión: $h \approx 2.9370 \text{ m}$.

4. [3 ptos] En un flujo isentrópico, las relaciones de área adimensional A/A^* y de presión P/P_0 están expresadas en función del número de Mach M y del coeficiente adiabático γ , según las siguientes ecuaciones no lineales:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left(\frac{2}{\gamma+1} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right) \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}, \quad \frac{P}{P_0} = \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2 \right)^{-\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

Para un flujo con $\frac{A}{A^*} = 1.6875$ y $\frac{P}{P_0} = 0.1278$, se desea estimar el valor aproximado de $\mathbf{x} = [M \quad \gamma]^T$ usando la siguientes formas de punto fijo:

$$M = \left(\frac{\gamma+1}{\gamma-1} \left(\frac{A}{A^*} M \right)^{\frac{2(\gamma-1)}{\gamma+1}} - \frac{2}{\gamma-1} \right)^{1/2}, \quad \gamma = (1-\gamma) \cdot \frac{\ln\left(\frac{P}{P_0}\right)}{\ln\left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)}$$

Aplice el método de punto fijo con punto semilla $\mathbf{x}^{(0)} = [1.9 \quad 1.3]^T$, utilizando una tolerancia de 0.05.

Solución Iterativa

Dados los datos

$$\frac{A}{A^*} = 1.6875, \quad \frac{P}{P_0} = 0.1278, \quad \mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 1.3 \end{bmatrix}, \quad \text{Tol: } 0.05$$

El esquema iterativo está dado por

$$M^{(k+1)} = \left(\frac{\gamma^{(k)}+1}{\gamma^{(k)}-1} \cdot (1.6875 \cdot M^{(k)})^{\frac{2(\gamma^{(k)}-1)}{\gamma^{(k)}+1}} - \frac{2}{\gamma^{(k)}-1} \right)^{1/2}$$

$$\gamma^{(k+1)} = (1-\gamma^{(k)}) \cdot \frac{\ln(0.1278)}{\ln\left(1 + \frac{\gamma^{(k)}-1}{2} \cdot (M^{(k)})^2\right)}$$

Realizamos las iteraciones en forma tabular

Iteración	$M^{(k)}$	$\gamma^{(k)}$	Error relativo
0	1.9000	1.3000	—
1	1.9295	1.4262	0.0654
2	1.9814	1.5011	0.0378

Como el error relativo de la segunda iteración es menor a la tolerancia nos detenemos.

Solución final: $M \approx 1.9814, \quad \gamma \approx 1.5011$

APLICACIONES

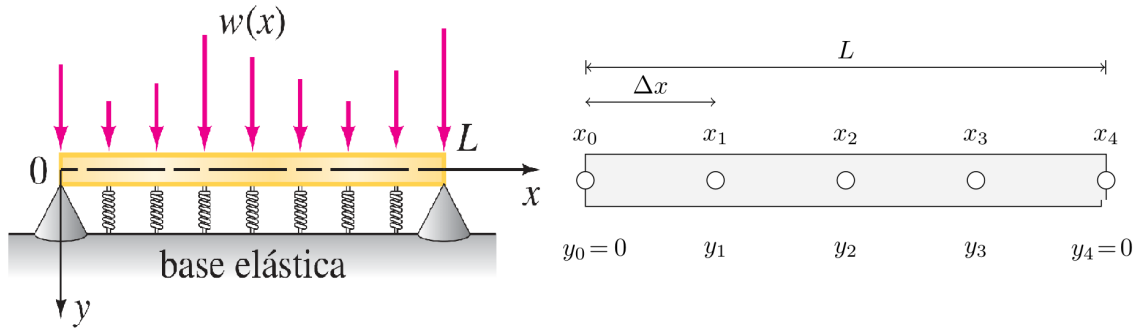
5. [10 ptos] Considere una viga de longitud L apoyada sobre una base elástica que ofrece una resistencia proporcional al desplazamiento vertical $y(x)$. Bajo la acción de una carga distribuida $w(x)$, la deformación de la viga se modela mediante la siguiente ecuación diferencial ordinaria de segundo orden:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{k}{EA} y(x) - \frac{w(x)}{EA}$$

donde E es el módulo de Young, A el área de la sección transversal y k la rigidez por unidad de longitud de la base elástica.

La viga se encuentra empotrada en los extremos, por lo que se cumple:

$$y(0) = 0, \quad y(L) = 0$$



- a) [3 ptos] Discretice la ecuación diferencial que describe la deformación vertical de la viga. Considere 5 nodos igualmente espaciados (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) en una viga de longitud $L = 1$ m, ordenados como se muestra en el lado derecho de la figura previa. También, considere $w(x) = 4$ N/m, $EA = 1$ N, $k = 10$ N/m², y que la segunda derivada se puede aproximar con la fórmula

$$\left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_i} \approx \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

Luego, escriba las 3 ecuaciones algebraicas resultantes únicamente en términos de las variables y_1, y_2, y_3 .

Solución

Evaluamos la ecuación diferencial en el nodo interior i :

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{(\Delta x)^2} \approx \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x_i} = \frac{k}{EA} y(x_i) - \frac{w(x_i)}{EA}$$

Si sustituimos los datos

$$k = 10, \quad EA = 1, \quad w(x) = 4, \quad L = 1 \text{ m}, \quad \Delta x = \frac{L}{4} = 0.25, \quad \frac{1}{(\Delta x)^2} = 16$$

en la ecuación discretizada resulta

$$16(y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) = 10y_i - 4$$

Considerando las condiciones de frontera $y_0 = y_4 = 0$ las ecuaciones una a una son:

$$i = 1 : \quad 16y_2 - 42y_1 = -4$$

$$i = 2 : \quad 16y_1 - 42y_2 + 16y_3 = -4$$

$$i = 3 : \quad 16y_2 - 42y_3 = -4$$

- b) [2 ptos] Escriba el sistema de ecuaciones resultante en forma matricial $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$, de tal manera que la diagonal de $\mathbf{A}$ sea positiva. Indique si la matriz del sistema es diagonal estrictamente dominante.

Forma Matricial

Multiplicamos por -1 al sistema de ecuaciones obtenido previamente para que la diagonal sea positiva:

$$i = 1 : \quad 42y_1 - 16y_2 = 4$$

$$i = 2 : \quad -16y_1 + 42y_2 - 16y_3 = 4$$

$$i = 3 : \quad -16y_2 + 42y_3 = 4$$

Escribimos en forma matricial $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$:

$$\begin{bmatrix} 42 & -16 & 0 \\ -16 & 42 & -16 \\ 0 & -16 & 42 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Luego la matriz A es **diagonal estrictamente dominante** pues:

- Fila 1: $|42| > |-16| \Rightarrow 42 > 16$
- Fila 2: $|42| > |-16| + |-16| \Rightarrow 42 > 32$
- Fila 3: $|42| > |-16| \Rightarrow 42 > 16$

- c) [3.5 ptos] Plantee las fórmulas iterativas del esquema algebraico del método de Gauss-Seidel y luego realice 2 iteraciones usando el punto semilla $\mathbf{y}^{(0)} = [0.2 \ 0.2 \ 0.2]^T$.

Iteraciones con Gauss-Seidel

Las fórmulas iterativas del método de **Gauss-Seidel** son:

$$y_1^{(k+1)} = \frac{1}{42} (4 + 16y_2^{(k)})$$

$$y_2^{(k+1)} = \frac{1}{42} (4 + 16y_1^{(k+1)} + 16y_3^{(k)})$$

$$y_3^{(k+1)} = \frac{1}{42} (4 + 16y_2^{(k+1)})$$

Usamos el punto inicial $\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}$

Iteración 1:

$$y_1^{(1)} = \frac{1}{42} (4 + 16 \cdot 0.2) = \frac{7.2}{42} \approx 0.1714$$

$$y_2^{(1)} = \frac{1}{42} (4 + 16 \cdot 0.1714 + 16 \cdot 0.2) = \frac{9.9424}{42} \approx 0.2367$$

$$y_3^{(1)} = \frac{1}{42} (4 + 16 \cdot 0.2367) = \frac{7.7872}{42} \approx 0.1854$$

Iteración 2:

$$y_1^{(2)} = \frac{1}{42} (4 + 16 \cdot 0.2367) \approx 0.1854$$

$$y_2^{(2)} = \frac{1}{42} (4 + 16 \cdot 0.1854 + 16 \cdot 0.1854) \approx 0.2365$$

$$y_3^{(2)} = \frac{1}{42} (4 + 16 \cdot 0.2365) \approx 0.1853$$

Resultado después de 2 iteraciones:

$$\mathbf{y}^{(2)} \approx \begin{bmatrix} 0.1854 \\ 0.2365 \\ 0.1853 \end{bmatrix}$$

d) [1.5 ptos] Halle el error relativo de las iteraciones realizadas en el ítem previo.

Error Relativo (Norma Infinito)

Sean las iteraciones:

$$\mathbf{y}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.2 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.1714 \\ 0.2367 \\ 0.1854 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.1854 \\ 0.2365 \\ 0.1853 \end{bmatrix}$$

El **error relativo con norma infinito** se define como:

$$\delta_{\text{rel}}^{(1)} = \frac{\|\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(0)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{y}^{(1)}\|_{\infty}}, \quad \delta_{\text{rel}}^{(2)} = \frac{\|\mathbf{y}^{(2)} - \mathbf{y}^{(1)}\|_{\infty}}{\|\mathbf{y}^{(2)}\|_{\infty}}$$

Calculamos primero normas del numerador y denominador

$$\|\mathbf{y}^{(1)} - \mathbf{y}^{(0)}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} -0.0286 \\ 0.0367 \\ -0.0146 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \max\{0.0286, 0.0367, 0.0146\} = 0.0367$$

$$\|\mathbf{y}^{(1)}\|_{\infty} = \max\{0.1717, 0.2367, 0.1854\} = 0.2367$$

$$\|\mathbf{y}^{(2)} - \mathbf{y}^{(1)}\|_{\infty} = \left\| \begin{bmatrix} 0.0140 \\ -0.0002 \\ -0.0001 \end{bmatrix} \right\|_{\infty} = \max\{0.0140, 0.0002, 0.0001\} = 0.0140$$

$$\|\mathbf{y}^{(2)}\|_{\infty} = \max\{0.1854, 0.2365, 0.1853\} = 0.2365$$

Entonces, el error relativo es:

$$\delta_{\text{rel}}^{(1)} = \frac{0.0367}{0.2367} = 0.1550, \quad \delta_{\text{rel}}^{(2)} = \frac{0.0140}{0.2365} = 0.0592$$

Conclusión: El error relativo en norma infinito tras dos iteraciones es aproximadamente 0.0592.