

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 110 minutos

Fecha: 8 de julio de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] Si dos modelos ajustados a la misma base de datos experimental presentan coeficientes de determinación $r_1^2 = 0.91$ y $r_2^2 = 0.63$.

Entonces afirmar que el primer modelo presenta un mejor ajuste que el segundo es válido únicamente cuando la comparación se realiza con base en el coeficiente de determinación, sin considerar otros criterios como el análisis de residuos o la complejidad del modelo.

2. [2 pts] Para un ajuste cuadrático con siete datos experimentales, la matriz del sistema sobredeterminado tiene dimensión 3×3 .

PROCEDIMENTAL

3. **[3 puntos]** En un sistema neumático, la fuerza ejercida sobre un pistón varía en función del ángulo θ según

$$f(\theta) = e^{-\theta} \sin(\theta) \sqrt{1 + \cos^2(\theta)}, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}.$$

El trabajo total realizado por el sistema está dado por

$$I = \int_0^{\pi/2} e^{-\theta} \sin(\theta) \sqrt{1 + \cos^2(\theta)} d\theta.$$

Se desea aproximar el valor de I mediante cuadratura de Gauss-Legendre.

- a) **[1 punto]** Escriba la integral en la forma $I = \int_{-1}^1 g(z) dz$ e identifique explícitamente la función $g(z)$.

- b) **[1 punto]** Aproxime el valor de la integral usando cuadratura de Gauss-Legendre con $n = 2$ puntos.

- c) **[1 punto]** Si el valor de referencia es

$$I_{\text{ref}} = 0.4744$$

calcule el error relativo porcentual de la aproximación obtenida en el ítem b).

4. **[3 puntos]** Considere el siguiente problema de valor de frontera:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -0.0196x^2, \quad 1 \leq x \leq 2,$$

sujeto a las condiciones de frontera

$$y(1) = 2.2108, \quad y(2) = 3.1863$$

Se solicita:

- a) **[1 punto]** Discretizar la ecuación diferencial mediante diferencias finitas centradas de segundo orden usando $h = 0.5$.

- b) **[1 punto]** Aproximar el valor de $y(1.5)$.

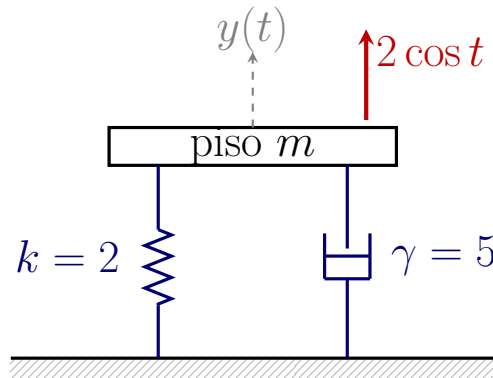
- c) **[1 punto]** Calcular el error relativo porcentual de la aproximación, sabiendo que la solución exacta es

$$y(x) = -0.0016x^4 + x + 1.2124.$$

APLICACIÓN

5. [10 pts] En el análisis sísmico de un edificio, el desplazamiento $y(t)$ de un piso satisface:

$$y'' + ky' + \gamma y = 2 \cos t, \quad y(0) = 0 \text{ m}, \quad y'(0) = 1 \text{ m/s}.$$



6. [3 pts] Defina $y_1 = y$ y $y_2 = y'$, y use este cambio de variable para escribir el problema como un sistema de primer orden $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$. Indique explícitamente el vector de estado $\mathbf{y}$, la función vectorial $\mathbf{F}$ y la condición inicial $\mathbf{y}_0$.

7. [3 pts] Aplique el método de **Euler** con paso $h = 0.5$ s para aproximar $y(1)$. Muestre todos los cálculos intermedios.

t	y_1	y_2	$\mathbf{k}_1$
0	0	1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$
0.5			$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$
1			_____

8. [3 pts] Aplique el método de **Heun** con paso $h = 0.5$ s para aproximar $y(1)$. Muestre todos los cálculos intermedios (predictor y corrector) y complete la tabla que se muestra.

t_i	u_i	v_i	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_2$
0	0	1	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ -2.7448 \end{bmatrix}$
0.5			$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$
1			_____	_____

9. [1 pts] Sabiendo que el valor exacto es $y_{\text{exact}}(1) \approx 0.5126$ m, utilizar los resultados de los ítems b) y c) para indicar cuál de las aproximaciones es mejor.

Formulario de Métodos Numéricos - Examen Final

1. Integración Numérica

Regla del Trapecio Compuesto: $h = \frac{b-a}{n}$

$$I \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Algoritmo de Romberg:

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1}}{4^{k-1} - 1} I_{j+1,k-1} - \frac{1}{4^{k-1} - 1} I_{j,k-1}$$

$M_{j,1}$ son los trapecios.

Cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^1 g(z) dz \approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i g(z_i)$$

Ptos	c_0	c_1	c_2	z_0	z_1	z_2
2	1	1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
3	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$

Cambio de Variable: Proporcionalidad

$\xleftarrow{b-a}$

$\xleftarrow{x-a} x \quad b$

$\xleftarrow{z-(-1)} z \quad 1$

$\xleftarrow{1-(-1)=2}$

2. EDO (PVI)

Método de RK2 (Heun):

$$x_{i+1} = x_i + h \left(\frac{1}{2} k_1 + \frac{1}{2} k_2 \right)$$

$$k_1 = f(t_i, x_i) \quad k_2 = f(t_i + h, x_i + h k_1)$$

Método de Runge-Kutta 4 (RK4):

$$x_{i+1} = x_i + \frac{h}{6} (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(t_i, x_i)$$

$$k_2 = f \left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} k_1 \right)$$

$$k_3 = f \left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2} k_2 \right)$$

$$k_4 = f(t_i + h, x_i + h k_3)$$

3. EDO y Sistemas Vectoriales (PVI)

Sistemas y EDO de Orden Superior:

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y})$$

Método de Euler:

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + h \mathbf{K}_1$$

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$$

Método de RK2 (Heun):

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{Y}_i + h \mathbf{K}_1)$$

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2} (\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)$$

Runge-Kutta 4 (RK4):

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F} \left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2} \mathbf{K}_1 \right)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{F} \left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2} \mathbf{K}_2 \right)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{Y}_i + h \mathbf{K}_3)$$

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \frac{h}{6} (\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)$$

4. Problemas de Valor Frontera (PVF)

Forma Estándar: $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$

Diferencias Finitas: Sustituyendo derivadas por diferencias finitas centradas:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i + r_i$$

5. Cálculo de Error

Error Relativo Porcentual (δ_r):

$$\delta_r = \left| \frac{\text{Valor}_{\text{Exacto}} - \text{Valor}_{\text{Aprox}}}{\text{Valor}_{\text{Exacto}}} \right| \times 100 \%$$