

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 110 minutos

Fecha: 8 de julio de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] Dados 5 puntos de interpolación $(x_0, y_0), \dots, (x_4, y_4)$, con $x_0 < x_1 < \dots < x_4$, se desea construir el spline cúbico natural

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i, \quad i = 0, 1, 2, 3.$$

Se puede afirmar que:

“Como existen 4 polinomios cúbicos y cada uno tiene 4 coeficientes, se deben determinar 16 incógnitas. Además, al tratarse de un spline cúbico natural, se imponen 2 condiciones naturales, por lo que el sistema final debe tener 18 ecuaciones.”

2. [2 pts] Para aproximar la tercera derivada $f'''(x_i)$ usando valores igualmente espaciados con paso h , se consideran las fórmulas

$$f'''(x_i) = \frac{f(x_{i+3}) - 3f(x_{i+2}) + 3f(x_{i+1}) - f(x_i)}{h^3} + O(h),$$

y

$$f'''(x_i) = \frac{-3f(x_{i+3}) + 14f(x_{i+2}) - 24f(x_{i+1}) + 18f(x_i) - 5f(x_{i-1}))}{2h^3} + O(h^2)$$

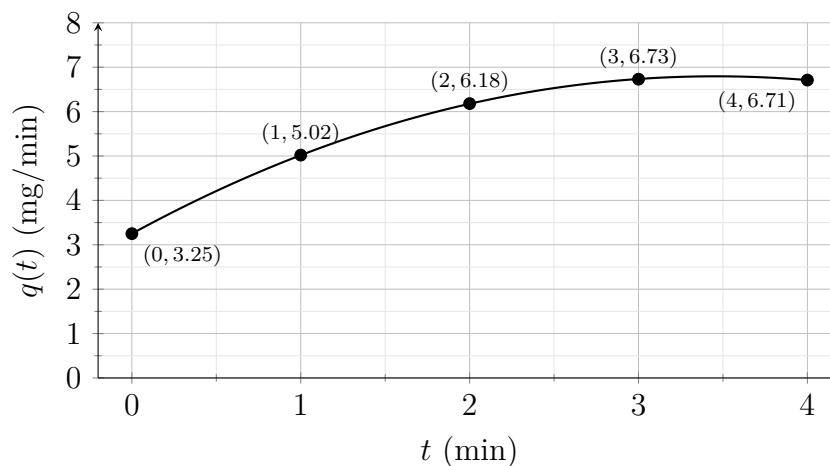
Se puede afirmar que:

“Ambas fórmulas tienen el mismo orden de precisión, pues las dos aproximan la tercera derivada $f'''(x_i)$ usando diferencias finitas.”

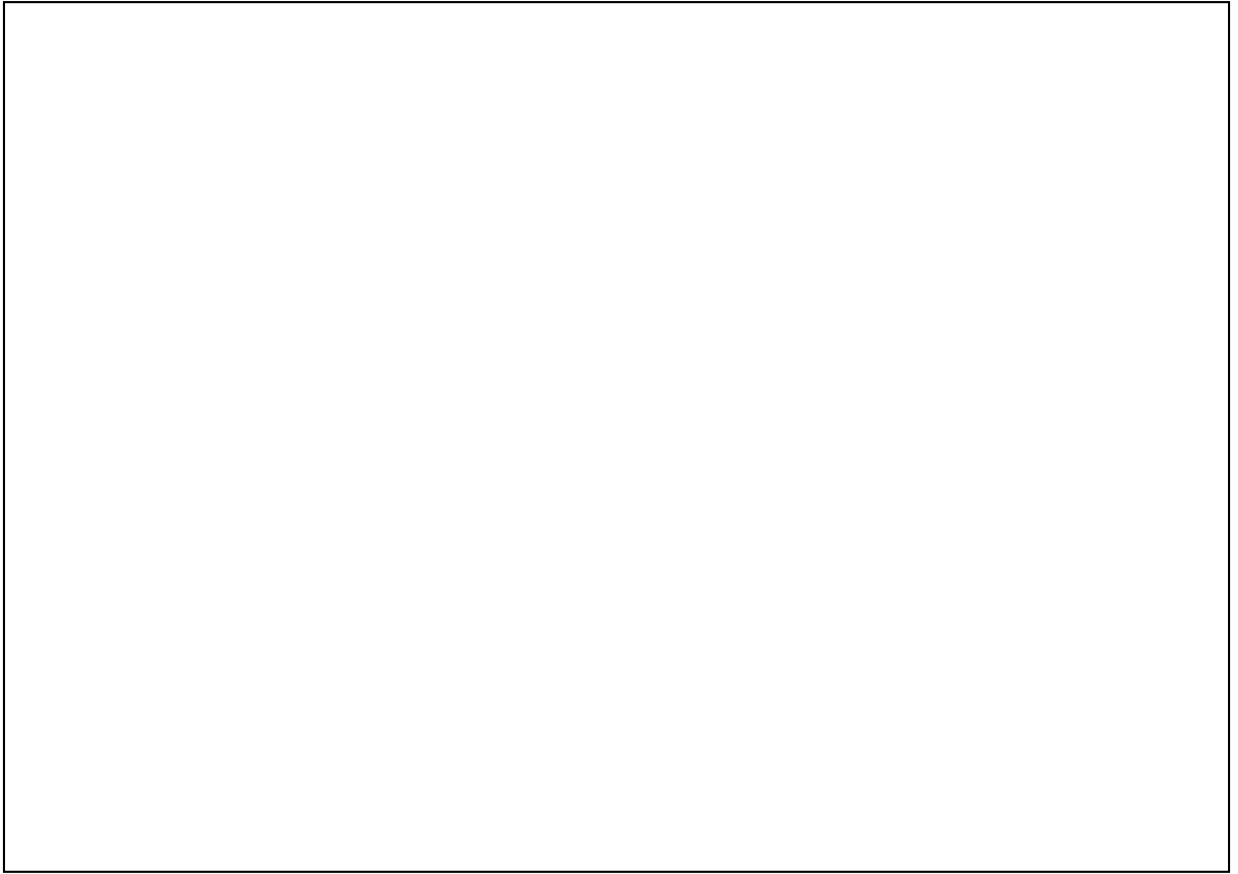
PROCEDIMENTAL

3. [3 puntos] En un ensayo de operación de un purificador industrial, se registra la tasa instantánea $q(t)$ de captura de partículas finas, medida en mg/min. La masa total capturada durante los primeros 4 minutos está dada por $M = \int_0^4 q(t) dt$.

El equipo de medición no entrega una expresión analítica para $q(t)$, sino una curva experimental suavizada, tal y como se muestra en la figura,



- a) **[1.5 puntos]** Usando únicamente los valores marcados en la gráfica, estime M mediante el método del trapecio compuesto en todo el intervalo $[0, 4]$ usando refinamientos sucesivos $h = (b - a)/n$ de $n = 1, 2$ y 4 subintervalos. Denote sus resultados por M_1 , M_2 , y M_4 , respectivamente.



- b) **[1.5 puntos]** A partir de las aproximaciones trapezoidales obtenidas en el ítem anterior, construya la tabla de Romberg hasta obtener $M_{1,3}$, siendo $M_{1,1} = M_1$, $M_{2,1} = M_2$, $M_{3,1} = M_4$, las aproximaciones de orden $\mathcal{O}(h^2)$.

j	$M_{j,1}$	$M_{j,2}$	$M_{j,3}$
1			
2			
3			

4. **[3 puntos]** En un sistema de control térmico, la variable $T = T(t)$ representa la temperatura normalizada de un microactuador que cambia en el tiempo t . El controlador sigue una respuesta dada por el PVI

$$\frac{dT}{dt} = f(t, T) = t - T, \quad T(0) = 1.$$

Se desea aproximar $T(1)$, por lo que se proponen dos estrategias numéricas con el mismo costo computacional:

- Estrategia A: Heun con $h = 0.5$.
- Estrategia B: RK4 con $h = 1$.

a) [1.5 puntos] Aplique la estrategia A para aproximar $T(1)$ y complete la tabla:

i	t_i	$T_i^{(A)}$	$K_1 = f(t_i, T_i^{(A)})$	$T_i^{*(A)} = T_i^{(A)} + hK_1$	$K_2 = f(t_i + h, T_i^{*(A)})$	$T_{i+1}^{(A)}$
0	0	1				
1	0.5					

b) [1.5 puntos] Aplique la estrategia B, complete la tabla y aproxime $T(1)$

Pendiente	Valor
$K_1 = f(t_0, T_0^{(B)})$	
$K_2 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, T_0^{(B)} + \frac{h}{2}K_1\right)$	
$K_3 = f\left(t_0 + \frac{h}{2}, T_0^{(B)} + \frac{h}{2}K_2\right)$	
$K_4 = f(t_0 + h, T_0^{(B)} + hK_3)$	

Si el valor de referencia para la temperatura en $t = 1$ s es de $T^{\text{ref}}(1) \approx 0.7358$,. Indique cuál de las dos estrategias fue más precisa. Justifique su respuesta con el error relativo porcentual.

APLICACIÓN

5. [10 pts] **Deflexión de una cuerda en rotación.** Considere una cuerda flexible de longitud $L = 5$ m y densidad lineal de masa constante $\rho = 0.04$ kg/m, estirada a lo largo del eje x . La cuerda gira con velocidad angular constante

$$\omega = 20 \text{ rad/s},$$

y una tensión transversal constante

$$T = 100 \text{ N}$$

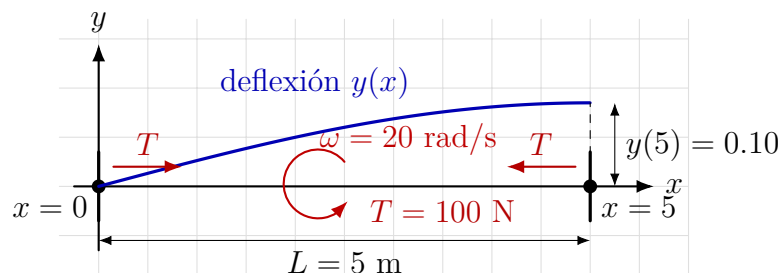
contrarresta la fuerza centrífuga.

Para pequeñas deflexiones, el desplazamiento transversal $y(x)$ se modela mediante

$$T \frac{d^2 y}{dx^2} + \rho \omega^2 y = 0.$$

sujeto a las condiciones

$$y(0) = 0, \quad y(5) = 0.10.$$



Considere como dato que la solución general de la ecuación diferencial homogénea:

$$y(x) = \frac{0.10}{\sin(2)} \sin(0.4x).$$

Se solicita:

- a) **[1 punto] Existencia y unicidad:** Escriba la EDO en la forma $y'' = f(x, y, y') = p(x)y' + q(x)y + r(x)$ y verifique si se cumplen las condiciones de existencia y unicidad para PVF lineales.

- b) **[3.5 puntos] Método de Heun como PVI:** Transforme la ecuación diferencial dada en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden. Luego, utilizando la pendiente inicial ($y'(0) = 0.2$), aproxime la solución mediante el método de Heun con tamaño de paso ($h = 2.5$), en los puntos ($x_0 = 0$), ($x_1 = 2.5$) y ($x_2 = 5$).

- c) **[3.5 puntos] Diferencias finitas:** Resuelve el PVF mediante diferencias finitas centradas de segundo orden usando 3 nodos interiores, con $h = 1.25$.

- d) **[2 puntos] Cálculo de error:** Calcule el error relativo porcentual de las aproximaciones de $y(2.5)$ obtenidas en los ítems b) y c), tomando como referencia la solución analítica. Con base en estos errores, determine cuál de los dos métodos proporciona una mejor aproximación en $(x = 2.5)$.

Formulario de Métodos Numéricos - Examen Final

1. Interpolación y Ajuste

Polinomio de Newton (Diferencias Divididas):

$$P_n(x) = f[x_0] + \cdots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

Regresión por Mínimos Cuadrados:

Ajuste a polinomio $y = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$. La matriz del sistema $(X^T X)\mathbf{a} = X^T \mathbf{y}$ es de $(m+1) \times (m+1)$.

Coef. Determinación (r^2): Mide varianza explicada. Comparar modelos solo por r^2 no siempre es concluyente sin analizar residuos.

Splines Cúbicos Naturales:

En $[x_i, x_{i+1}]$: $\mathbf{S}_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$

Para n subintervalos se tienen $4n$ incógnitas. Se requieren $4n$ ecuaciones. Las *condiciones naturales* imponen: $M_0 = 0$ y $M_n = 0$.

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} \quad b_i = \frac{M_i}{2}$$
$$c_i = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}h_i \quad d_i = y_i$$

$M_i = S''(x_i)$.

Resolución vía sistema tridiagonal: $\mathbf{AM} = 6\mathbf{b}$.

2. Derivación y Diferencias Finitas

Fórmulas **centradas** de orden $\mathcal{O}(h^2)$:

$$f'(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

$$f''(x_i) \approx \frac{f(x_{i+1}) - 2f(x_i) + f(x_{i-1}))}{h^2}$$

Nota: Fórmulas con más nodos incrementan el orden de precisión $\mathcal{O}(h^p)$ y reducen el error de truncamiento.

3. Integración Numérica

Regla del Trapecio Compuesto: ($h = \frac{b-a}{n}$)

$$I \approx \frac{h}{2} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) + f(x_n) \right]$$

Extrapolación de Romberg: (Mejora iterativa)

$$M_{j,k} = M_{j+1,k-1} + \frac{M_{j+1,k-1} - M_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}$$

$M_{j,1}$ son los trapecios. $M_{2,2} = M_{3,1} + \frac{M_{3,1} - M_{2,1}}{3}$ es $\mathcal{O}(h^4)$.

Cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^1 g(z) dz \approx \sum_{i=0}^{n-1} c_i g(z_i)$$

Ptos	c_0	c_1	c_2	z_0	z_1	z_2
2	1	1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
3	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$

Cambio de Variable (Deducción):

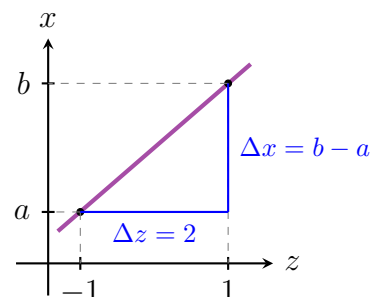
A. Argumento de Proporcionalidad:

$\xleftarrow{b-a} \xrightarrow{a} x \xrightarrow{b} x$

$\xleftarrow{-1} z \xrightarrow{(-1)} z \xrightarrow{1} z$

$\xleftarrow{-1} z \xrightarrow{(-1)} z \xrightarrow{1} z$

B. Análisis de la Recta $x(z)$:



$$m = \frac{b-a}{2} \rightarrow x = \frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2}$$

4. EDO y Sistemas Vectoriales (PVI)

Sistemas y EDO de Orden Superior:

Dada $y'' + ky' + \gamma y = F(t)$, sea $y_1 = y$, $y_2 = y'$.

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ F(t) - ky_2 - \gamma y_1 \end{bmatrix}$$

Método de Euler: $\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + h\mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$

Método de Heun (Predictor-Corrector):

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{Y}_i + h\mathbf{K}_1)$$

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2}(\mathbf{K}_1 + \mathbf{K}_2)$$

Runge-Kutta 4 (RK4):

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{Y}_i)$$

$$\mathbf{K}_2 = \mathbf{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{K}_1\right)$$

$$\mathbf{K}_3 = \mathbf{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{Y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{K}_2\right)$$

$$\mathbf{K}_4 = \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{Y}_i + h\mathbf{K}_3)$$

$$\mathbf{Y}_{i+1} = \mathbf{Y}_i + \frac{h}{6}(\mathbf{K}_1 + 2\mathbf{K}_2 + 2\mathbf{K}_3 + \mathbf{K}_4)$$

5. Problemas de Valor Frontera (PVF)

Forma Estándar: $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$

Diferencias Finitas: Sustituyendo derivadas:

$$\frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} = p_i \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + q_i y_i + r_i$$

6. Cálculo de Error

Error Relativo Porcentual (ε_r):

$$\varepsilon_r = \left| \frac{\text{Valor}_{\text{Exacto}} - \text{Valor}_{\text{Aprox}}}{\text{Valor}_{\text{Exacto}}} \right| \times 100 \%$$