

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 110 minutos

Fecha: 27 de febrero del 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] En un medio poroso saturado, la concentración estacionaria $u(x)$ de un contaminante disuelto en una columna de longitud 1 m está gobernada por el modelo de difusión–reacción lineal:

$$-D u''(x) + c(x) u(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

donde:

- $D = 1$ es el coeficiente de difusión efectivo,
- $c(x) = 2 + x^2$ representa una tasa de reacción química (consumo del contaminante),
- $f(x) = \sin(\pi x)$ modela una fuente distribuida.

Además, los valores de concentración en los extremos del dominio: $u(0) = 0, u(1) = 1$.

Se puede afirmar que:

*"El problema de valor de frontera anterior tiene **solución única** en $[0, 1]$."*

2. [2 pts] Dados los puntos de interpolación (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , la construcción del spline cúbico natural para dichos puntos, tiene la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0(x - x_0)^3 + b_0(x - x_0)^2 + c_0(x - x_0) + d_0 & ; \quad x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1 & ; \quad x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

y requiere la formulación y solución de un sistema lineal de p ecuaciones con p incógnitas (los coeficientes del spline). Alternativamente, puede plantearse un sistema lineal de q ecuaciones con q incógnitas en términos de $M_i = S''(x_i)$, para luego determinar los coeficientes de dicho spline. En este caso, se puede afirmar que $p - q = 1$.

PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] En un experimento de ingeniería ambiental se midió el coeficiente de difusión D de un gas contaminante en aire seco a distintas temperaturas. Los resultados fueron:

$T (^{\circ}\text{C})$	7	12	22	29
$D (\text{cm}^2/\text{s})$	0.2	0.6	0.7	1.1

- a) [1.5 pts] Construya la **tabla de diferencias divididas de Newton**. **Nota:** *Incluya en la tabla la data experimental.*

T_i	D_i	$f[]$	$f[,]$	$f[, ,]$

- b) [1.5 pts] Halle el **polinomio interpolante** y luego estime el coeficiente de difusión del gas a $T = 26^\circ\text{C}$.

4. [3 pts] Para calcular la siguiente integral

$$I_f = \int_0^6 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(2x), & 0 \leq x \leq 2, \\ e^{-(x-2)} \cos(x), & 2 < x \leq 6. \end{cases},$$

se procede dividiendo por tramos.

- a) [1 pts] Para *cada* tramo, realice el cambio de variable lineal y escriba la integral correspondiente en el intervalo estándar $z \in [-1, 1]$.

- b) [2 pts] Aplique la cuadratura Gauss–Legendre de **3 puntos** en cada tramo y luego indique el valor aproximado de I_f .

APLICACIÓN

5. [10 pts] En un modelo de Resonancia Magnética Nuclear (RMN), una vez finalizado un pulso corto de radiofrecuencia, la magnetización transversal $m(t)$ evoluciona libremente bajo la acción del campo magnético estático B_0 , perdiendo coherencia debido a los efectos de relajación transversal. Un modelo simplificado para describir este fenómeno es el oscilador armónico amortiguado:

$$\frac{d^2m}{dt^2} + 2\beta\frac{dm}{dt} + \omega^2m = 0$$

donde:

- $m(t)$ representa la magnetización transversal,
- ω es la frecuencia natural del sistema (frecuencia de Larmor),
- $\beta = \frac{1}{T_2}$ es el coeficiente asociado a la relajación transversal.

Se sabe que inmediatamente después de un pulso de 90° , la magnetización transversal alcanza su valor máximo y no posee velocidad inicial, esto es:

$$m(0) = 1, \quad m'(0) = 0.$$

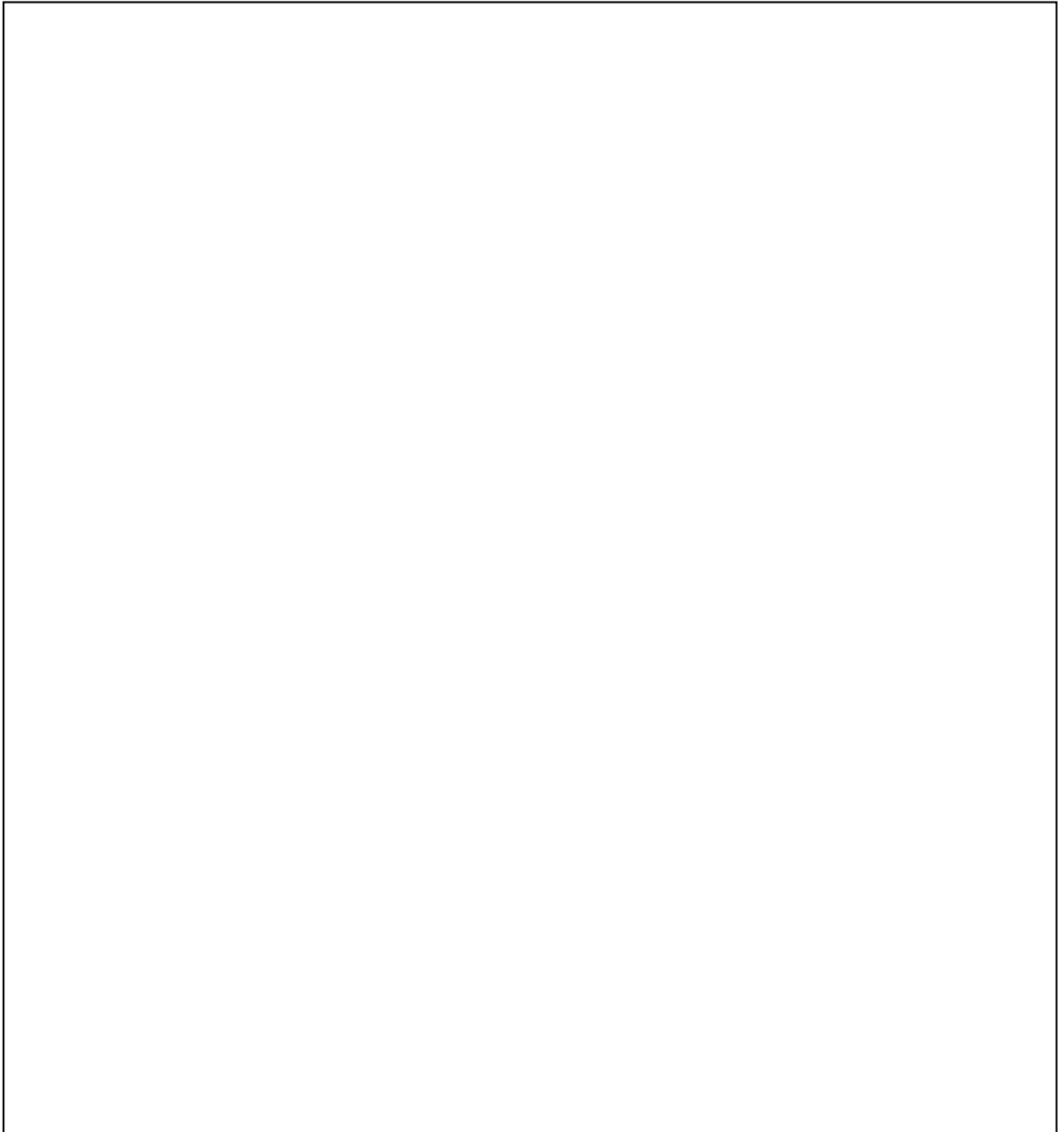
- a) [2 pts] Plantee el modelo matemático como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (PVI) en forma vectorial $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$.

- b) [6 pts] Considere ahora una variación del sistema en el que los parámetros son $\omega = 1.5$, $T_2 = 4$. Esto resulta en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} u' = v & u(0) = 1 \\ v' = -\frac{1}{2}v - \frac{9}{4}u, & v(0) = 0 \end{cases}$$

Realice los cálculos necesarios utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para completar la tabla siguiente. Use un tamaño de paso $h = 1$. Nota: Mostrar procedimiento, completar únicamente la tabla no le otorgará el puntaje completo.

t_i	u_i	v_i	$\mathbf{k}_1$	$\mathbf{k}_2$	$\mathbf{k}_3$	$\mathbf{k}_4$
0	1	0	$\begin{bmatrix} 0 \\ -2.2500 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.5625 \\ -0.0702 \end{bmatrix}$
1	0.2500	-1.1367	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -1.1338 \\ 1.2832 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -0.4951 \\ 0.9606 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \\ \end{bmatrix}$
2			$\begin{bmatrix} -0.2812 \\ 1.2922 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3649 \\ 1.2855 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.3616 \\ 0.5603 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0.2791 \\ 0.1984 \end{bmatrix}$
3	-0.2700	0.5825	—————	—————	—————	—————



- c) [2 pts] **Calcule el índice RMSE** de la magnetización aproximada obtenida mediante el método RK4 (m_{num}) en los nodos $t = 0, 1, 2, 3$, utilizando como referencia los siguientes valores exactos:

t_j	$m_{\text{exacta}}(t_j)$
0	1
1	0.2025
2	-0.5776
3	-0.2053

El índice RMSE está definido por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} (m_{\text{num}}(t_j) - m_{\text{exacta}}(t_j))^2}$$

donde $M = 4$ es el número total de nodos considerados.

Formulario de Métodos Numéricos

1. Interpolación Polinomial

Polinomio de Newton (Diferencias Divididas):

$$P_n(x) = f[x_0] + \cdots + f[x_0, \dots, x_n] \prod_{i=0}^{n-1} (x - x_i)$$

2. Splines Cúbicos Naturales

En el subintervalo $[x_i, x_{i+1}]$:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i$$

Coeficientes ($h_i = x_{i+1} - x_i$ y $M_i = S''_i(x_i)$):

$$a_i = \frac{M_{i+1} - M_i}{6h_i} \quad b_i = \frac{M_i}{2}$$

$$c_i = f[x_i, x_{i+1}] - \frac{M_{i+1} + 2M_i}{6}h_i \quad d_i = y_i$$

Nota: Se resuelve el sistema tridiagonal $\mathbf{AM} = 6\mathbf{b}$.

3. Integración Numérica

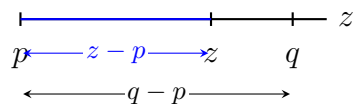
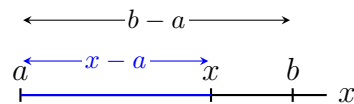
Cuadratura de Gauss-Legendre:

$$\int_{-1}^1 g(z) dz \approx \sum_{i=0}^n c_i g(z_i)$$

Ptos	c_0	c_1	c_2	z_0	z_1	z_2
2	1	1		$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
3	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$

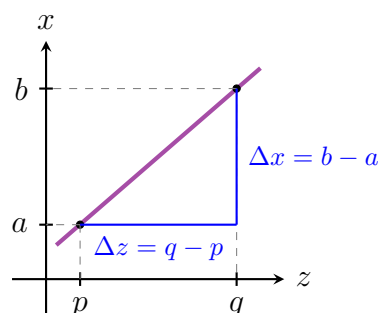
Cambio de Variable (Deducción):

A. Argumento de Proporcionalidad:



$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{z - p}{q - p}$$

B. Análisis de la Recta $x(z)$:



$$m = \frac{\Delta x}{\Delta z} = \frac{b - a}{q - p} \rightarrow x - a = m(z - p)$$

4. EDO y Sistemas (PVI)

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i)$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1)$$

$$\mathbf{k}_3 = \mathbf{F}(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2)$$

$$\mathbf{k}_4 = \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\mathbf{k}_3)$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

5. Problemas de Valor de Frontera (PVF)

Forma estándar: $y'' = p(x)y' + q(x)y + r(x)$

Existencia: Si p, q, r son continuas y $q(x) > 0$ en $[a, b]$, existe solución única.