

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas (V)** o **Falsas (F)**. En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] En un medio poroso saturado, la concentración estacionaria $u(x)$ de un contaminante disuelto en una columna de longitud 1 m está gobernada por el modelo de difusión-reacción lineal:

$$-D u''(x) + c(x) u(x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1,$$

donde:

- $D = 1$ es el coeficiente de difusión efectivo,
- $c(x) = 2 + x^2$ representa una tasa de reacción química (consumo del contaminante),
- $f(x) = \sin(\pi x)$ modela una fuente distribuida.

Además, los valores de concentración en los extremos del dominio: $u(0) = 0, u(1) = 1$.

Se puede afirmar que:

*"El problema de valor de frontera anterior tiene **solución única** en $[0, 1]$."*

Solución

Por el **teorema de existencia y unicidad** para PVF lineales en forma estándar:

$$y''(x) = p(x)y'(x) + q(x)y(x) + r(x),$$

si $p(x), q(x), r(x)$ son continuas en $[a, b]$ y $q(x) > 0$ para todo $x \in [a, b]$, entonces el PVF con condiciones de Dirichlet tiene **solución única**.

Reescribiendo:

$$u''(x) = 0 \cdot u'(x) + (2 + x^2)u(x) - \sin(\pi x),$$

se identifica

$$p(x) = 0, \quad q(x) = 2 + x^2, \quad r(x) = -\sin(\pi x).$$

Son continuas en $[0, 1]$ y además

$$q(x) = 2 + x^2 \geq 2 > 0 \quad \forall x \in [0, 1].$$

Por lo tanto, el problema tiene **solución única** y la afirmación es **Verdadera (V)**.

2. [2 pts] Dados los puntos de interpolación (x_0, y_0) , (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , la construcción del spline cúbico natural para dichos puntos, tiene la forma:

$$S(x) = \begin{cases} S_0(x) = a_0(x - x_0)^3 + b_0(x - x_0)^2 + c_0(x - x_0) + d_0 & ; \quad x \in [x_0, x_1], \\ S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1 & ; \quad x \in [x_1, x_2]. \end{cases}$$

y requiere la formulación y solución de un sistema lineal de p ecuaciones con p incógnitas (los coeficientes del spline). Alternativamente, puede plantearse un sistema lineal de q ecuaciones con q incógnitas en términos de $M_i = S''(x_i)$, para luego determinar los coeficientes de dicho spline. En este caso, se puede afirmar que $p - q = 1$.

Solución

Para 3 puntos hay $n = 2$ subintervalos. Cada tramo cúbico S_i tiene 4 coeficientes (a_i, b_i, c_i, d_i) , luego

$$p = 4n = 4 \cdot 2 = 8.$$

En la formulación por momentos $M_i = S''(x_i)$ hay $n + 1 = 3$ momentos (M_0, M_1, M_2) , pero para spline cúbico **natural** se cumple

$$M_0 = S''(x_0) = 0, \quad M_2 = S''(x_2) = 0,$$

por lo que la única incógnita es M_1 y el sistema es de $q = n - 1 = 1$ ecuación con 1 incógnita. Así, $p - q = 8 - 1 = 7 \neq 1$. Por lo tanto, la afirmación es **Falsa (F)**.

3. [3 pts] En un experimento de ingeniería ambiental se midió el coeficiente de difusión D de un gas contaminante en aire seco a distintas temperaturas. Los resultados fueron:

$T (^{\circ}\text{C})$	7	12	22	29
$D (\text{cm}^2/\text{s})$	0.2	0.6	0.7	1.1

- a) [1.5 pts] Construya la **tabla de diferencias divididas de Newton**. Nota: *Incluya en la tabla la data experimental.*

Solución

La fórmula recursiva para las diferencias divididas es:

$$f[x_i, \dots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k}] - f[x_i, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

Cálculo de las Primeras Diferencias Divididas $f[T_i, T_{i+1}]$:

- $f[T_0, T_1] = \frac{D_1 - D_0}{T_1 - T_0} = \frac{0.6 - 0.2}{12 - 7} = \frac{0.4}{5} = \mathbf{0.08}$
- $f[T_1, T_2] = \frac{D_2 - D_1}{T_2 - T_1} = \frac{0.7 - 0.6}{22 - 12} = \frac{0.1}{10} = \mathbf{0.01}$
- $f[T_2, T_3] = \frac{D_3 - D_2}{T_3 - T_2} = \frac{1.1 - 0.7}{29 - 22} = \frac{0.4}{7} \approx \mathbf{0.0571}$

Cálculo de las Segundas Diferencias Divididas $f[T_i, T_{i+1}, T_{i+2}]$:

- $f[T_0, T_1, T_2] = \frac{0.01 - 0.08}{22 - 7} = \frac{-0.07}{15} \approx \mathbf{-0.0047}$
- $f[T_1, T_2, T_3] = \frac{0.0571 - 0.01}{29 - 12} = \frac{0.0471}{17} \approx \mathbf{0.0028}$

Cálculo de la Tercera Diferencia Dividida $f[T_0, T_1, T_2, T_3]$:

- $f[T_0, T_1, T_2, T_3] = \frac{0.0028 - (-0.0047)}{29 - 7} = \frac{0.0075}{22} \approx \mathbf{0.0003}$

Tabla Resumen:

T_i	D_i	1ra Diferencia	2da Diferencia	3ra Diferencia
7	0.2	0.08	-0.0047	0.0003
12	0.6	0.01	0.0028	
22	0.7	0.0571		
29	1.1			

- b) [1.5 pts] Halle el **polinomio interpolante** y luego estime el coeficiente de difusión del gas a $T = 26^\circ\text{C}$.

Solución

El polinomio interpolante de Newton de grado n se define tomando los coeficientes de la primera fila de la tabla de diferencias:

$$P_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \dots$$

Sustituyendo nuestros valores correspondientes ($x_i \rightarrow T_i$):

$$P_3(T) = 0.2 + 0.08(T - 7) - 0.0047(T - 7)(T - 12) + 0.0003(T - 7)(T - 12)(T - 22)$$

Estimamos el valor del coeficiente de difusión del gas a $T = 26$:

$$P_3(26) = 0.2 + 0.08(19) - 0.0047(19)(14) + 0.0003(19)(14)(4)$$

$$P_3(26) = 0.7890$$

Por lo tanto, el coeficiente estimado es **0.7890 cm²/s**.

4. [3 pts] Para calcular la siguiente integral

$$I_f = \int_0^6 f(x) dx, \quad f(x) = \begin{cases} \sin(2x), & 0 \leq x \leq 2, \\ e^{-(x-2)} \cos(x), & 2 < x \leq 6. \end{cases}$$

se procede dividiendo por tramos.

- a) [1 pts] Para *cada* tramo, realice el cambio de variable lineal y escriba la integral correspondiente en el intervalo estándar $z \in [-1, 1]$.

Solución

Para aplicar la cuadratura de Gauss-Legendre, los límites de integración deben estar normalizados en el dominio $[-1, 1]$. Para transformar una integral genérica $\int_a^b f(x)dx$, usamos el cambio de variable lineal:

$$x = \frac{b-a}{2}z + \frac{b+a}{2} \quad \text{lo que implica} \quad dx = \frac{b-a}{2}dz$$

Tramo 1 ($0 \leq x \leq 2$): Aquí $a = 0, b = 2$.

$$x = \frac{2-0}{2}z + \frac{2+0}{2} = z + 1 \quad \longrightarrow dx = dz$$

Sustituimos en:

$$I_1 = \int_0^2 \sin(2x) dx = \int_{-1}^1 \sin(2z + 2) dz$$

Tramo 2 ($2 < x \leq 6$): Aquí $a = 2, b = 6$.

$$x = \frac{6-2}{2}z + \frac{6+2}{2} = 2z + 4 \quad \longrightarrow dx = 2dz$$

Sustituimos en:

$$I_2 = \int_2^6 e^{-(x-2)} \cos(x) dx = \int_{-1}^1 2e^{-(2z+2)} \cos(2z + 4) dz$$

- b) [2 pts] Aplique la cuadratura Gauss–Legendre de **3 puntos** en cada tramo y luego indique el valor aproximado de I_f .

Solución

La cuadratura aproxima la integral como $\int_{-1}^1 g(z) dz \approx \sum_{i=0}^2 w_i g(z_i)$. Para 3 puntos, los pesos y puntos son:

Ptos	c_0	c_1	c_2	z_0	z_1	z_2
3	$\frac{5}{9}$	$\frac{8}{9}$	$\frac{5}{9}$	$-\sqrt{\frac{3}{5}}$	0	$\sqrt{\frac{3}{5}}$

Para el tramo 1 (I_1): $g_1(z) = \sin(2z + 2)$, por lo que la aproximación es:

$$I_1 \approx \frac{5}{9} g_1 \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + \frac{8}{9} g_1(0) + \frac{5}{9} g_1 \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right)$$

$$I_1 \approx \frac{5}{9}(0.4357) + \frac{8}{9}(0.9093) + \frac{5}{9}(-0.3964) = \mathbf{0.8302}$$

Para el tramo 2 (I_2): $g_2(z) = 2e^{-(2z+2)} \cos(2z + 4)$

$$I_2 \approx \frac{5}{9} g_2 \left(-\sqrt{\frac{3}{5}} \right) + \frac{8}{9} g_2(0) + \frac{5}{9} g_2 \left(\sqrt{\frac{3}{5}} \right)$$

$$I_2 \approx \frac{5}{9}(-0.9823) + \frac{8}{9}(-0.1769) + \frac{5}{9}(0.0427) = \mathbf{-0.6791}$$

Sumamos ambas áreas:

$$I_f = I_1 + I_2 \approx 0.8302 + (-0.6791) = \mathbf{0.1511}$$

5. [10 pts] En un modelo de Resonancia Magnética Nuclear (RMN), una vez finalizado un pulso corto de radiofrecuencia, la magnetización transversal $m(t)$ evoluciona libremente bajo la acción del campo magnético estático B_0 , perdiendo coherencia debido a los efectos de relajación transversal. Un modelo simplificado para describir este fenómeno es el oscilador armónico amortiguado:

$$\frac{d^2 m}{dt^2} + 2\beta \frac{dm}{dt} + \omega^2 m = 0$$

donde:

- $m(t)$ representa la magnetización transversal,
- ω es la frecuencia natural del sistema,
- $\beta = \frac{1}{T_2}$ es el coeficiente asociado a la relajación transversal.

Se sabe que inmediatamente después de un pulso de 90° , la magnetización transversal alcanza su valor máximo y no posee velocidad inicial, esto es:

$$m(0) = 1, \quad m'(0) = 0.$$

- a) [2 pts] Plantee el modelo matemático como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden (PVI) en forma vectorial $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$.

Solución

Una EDO de segundo orden no puede resolverse directamente mediante métodos numéricos estándar como Euler o RK4. La técnica estándar es introducir variables auxiliares para reducir la EDO de orden n a un sistema de n EDOs acopladas de primer orden.

Paso 1: Despejamos m'' en la EDO original: $m'' = -2\beta m' - \omega^2 m$

Paso 2: Cambio de variable

Sea $y_1(t)$ la posición (magnetización, variable dependiente) y $y_2(t)$ la velocidad de cambio. Entonces definimos:

$$y_1 = m$$

$$y_2 = m'$$

Paso 3: Derivación del sistema

Tomamos la derivada respecto al tiempo t de las nuevas variables y sustituimos las variables anteriores.

$$\begin{cases} y_1' = m' & \longrightarrow y_1' = y_2 \\ y_2' = m'' & \longrightarrow y_2' = -2\beta y_2 - \omega^2 y_1 \end{cases}$$

Paso 4: Expresión Vectorial

Definiendo el vector de estado como $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$, el sistema en su forma $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$ queda planteado como:

$$\begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -2\beta y_2 - \omega^2 y_1 \end{bmatrix}$$

Con la condición inicial dada vectorialmente como:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} m(0) \\ m'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- b) [6 pts] Considere ahora una variación del sistema en el que los parámetros son $\omega = 1.5$, $T_2 = 4$. Esto resulta en el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\begin{cases} u' = v & u(0) = 1 \\ v' = -\frac{1}{2}v - \frac{9}{4}u, & v(0) = 0 \end{cases}$$

Realice los cálculos necesarios utilizando el método de Runge-Kutta de cuarto orden (RK4) para completar la tabla siguiente. Use un tamaño de paso $h = 1$. **Nota:** Mostrar procedimiento, completar únicamente la tabla no le otorgará el puntaje completo.

t_i	u_i	v_i	K_1	K_2	K_3	K_4
0	1	0	0 -2.2500	-1.1250 -1.6875	-0.8438 -0.5625	-0.5625 -0.0702
1	0.2500	-1.1367	-1.1367 0.0059	-1.1338 1.2832	-0.4951 0.9606	-0.1761 0.6395
2	-0.5118	-0.2812	-0.2812 1.2922	0.3649 1.2855	0.3616 0.5603	0.2791 0.1984
3	-0.2700	0.5825	_____	_____	_____	_____

Solución

Para iterar de t_i a t_{i+1} , el método evalúa cuatro pendientes vectoriales sucesivas para obtener un promedio ponderado altamente preciso:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i) & \mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}\left(t_i + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) & \mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\mathbf{k}_3) \end{aligned}$$

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4)$$

Definimos la función vectorial basada en el sistema dado: $\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} v \\ -0.5v - 2.25u \end{bmatrix}$

Para $i=0$: $t_0 = 1$, $\mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (cond. inicial). Datos: $\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2.25 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_4 = \begin{bmatrix} -0.5625 \\ -0.0702 \end{bmatrix}$.

Calculamos $\mathbf{k}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_2 &= \mathbf{F}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2}\mathbf{k}_1\right) = \mathbf{F}\left(0 + \frac{(1)}{2}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(1)}{2} \begin{bmatrix} 0 \\ -2.25 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{F}\left(0.5, \begin{bmatrix} 1 \\ -1.125 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -1.125 \\ -0.5(-1.125) - 2.25(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.125 \\ -1.6875 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos $\mathbf{k}_3$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_3 &= \mathbf{F}\left(t_0 + \frac{h}{2}, \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2}\mathbf{k}_2\right) = \mathbf{F}\left(0 + \frac{(1)}{2}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{(1)}{2} \begin{bmatrix} -1.125 \\ -1.6875 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{F}\left(0.5, \begin{bmatrix} 0.4375 \\ -0.8438 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -0.8438 \\ -0.5(-0.8438) - 2.25(0.4375) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.8438 \\ -0.5625 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para $i=1$: $t_1 = 1$, $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} 0.25 \\ -1.1367 \end{bmatrix}$ (dato). Datos: $\mathbf{k}_2 = \begin{bmatrix} -1.1338 \\ 1.2832 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{k}_3 = \begin{bmatrix} -0.4951 \\ 0.9606 \end{bmatrix}$.

Calculamos $\mathbf{k}_1$:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_1, \mathbf{y}_1) = \mathbf{F}\left(1, \begin{bmatrix} 0.25 \\ -1.1367 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} -1.1367 \\ -0.5(-1.1367) - 2.25(0.25) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1.1367 \\ 0.0059 \end{bmatrix}$$

Calculamos $\mathbf{k}_4$:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_4 &= \mathbf{F}(t_1 + h, \mathbf{y}_1 + h\mathbf{k}_3) = \mathbf{F}\left(1 + (1), \begin{bmatrix} 0.25 \\ -1.1367 \end{bmatrix} + (1) \begin{bmatrix} -0.4951 \\ 0.9606 \end{bmatrix}\right) = \mathbf{F}\left(2, \begin{bmatrix} -0.2451 \\ -0.1761 \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} -0.1761 \\ -0.5(-0.1761) - 2.25(-0.2451) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1761 \\ 0.6395 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Calculamos $\mathbf{y}_2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2 &= \mathbf{y}_1 + \frac{1}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \\ &= \begin{bmatrix} 0.2500 \\ -1.1367 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}\left(\begin{bmatrix} -1.1367 \\ 0.0059 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1.1338 \\ 1.2832 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.4951 \\ 0.9696 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.1761 \\ 0.6395 \end{bmatrix}\right) \\ \mathbf{y}_2 &= \begin{bmatrix} -0.5118 \\ -0.2812 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Para completar la tabla, los valores son $u_2 = -0.5118$ y $v_2 = -0.2812$.

- c) [2 pts] Calcule el índice RMSE de la magnetización aproximada obtenida mediante el método RK4 (m_{num}) en los nodos $t = 0, 1, 2, 3$, utilizando como referencia los siguientes valores exactos:

t_j	$m_{\text{exacta}}(t_j)$
0	1
1	0.2025
2	-0.5776
3	-0.2053

El índice RMSE está definido por:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} (m_{\text{num}}(t_j) - m_{\text{exacta}}(t_j))^2}$$

donde $M = 4$ es el número total de nodos considerados.

Solución

Se tienen los valores exactos y numéricos obtenidos en el ítem anterior:

t_j	$m_{\text{exacta}}(t_j)$	$m_{\text{num}}(t_j)$
0	1	1
1	0.2025	0.25
2	-0.5776	-0.5118
3	-0.2053	-0.27

Se calculan los errores cuadráticos en cada nodo:

$$(1 - 1)^2 = 0.0000$$

$$(0.25 - 0.2025)^2 = 0.0023$$

$$(-0.5118 - (-0.5776))^2 = 0.0043$$

$$(-0.27 - (-0.2053))^2 = 0.0042$$

El error cuadrático medio es:

$$\text{MSE} = \frac{0.0000 + 0.0023 + 0.0043 + 0.0042}{4} = 0.0027$$

Finalmente, se calcula la raíz del error cuadrático medio:

$$\text{RMSE} = \sqrt{0.0027} \quad \longrightarrow \quad \text{RMSE} = \mathbf{0.0520}$$