

[Cod: CC2104]

[Curso: Métodos Numéricos]

Solucionario Examen Final Modelo 3

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] El orden de error de la fórmula de diferencias finitas centradas es el mismo que el orden de error de la fórmula de diferencias finitas hacia atrás.

Solución:

Respuesta: FALSO (F)

Justificación:

- La fórmula de **diferencia hacia atrás** (o hacia adelante) se deduce truncando la serie de Taylor después del primer término, lo que genera un error de orden $O(h)$.
- La fórmula de **diferencia centrada** elimina los términos pares de la expansión de Taylor, resultando en un error de truncamiento de orden $O(h^2)$.

Al ser $O(h) \neq O(h^2)$, los órdenes de convergencia no son los mismos.

2. [2 pts] Respecto al cálculo de la integral $I = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$, el valor más inexacto que se obtiene con la cuadratura Gaussiana ocurre cuando se considera $n = 2$ puntos.

Solución:

Respuesta: VERDADERO (V)

Justificación: La cuadratura de Gauss-Legendre con n puntos garantiza exactitud para polinomios de grado $2n - 1$.

- Para $n = 2$, el grado de precisión es 3.
- Para $n = 3$, el grado de precisión es 5.

Dado que la función e^{-x^2} no es polinómica, el error de truncamiento depende inversamente de n . Por ende, dentro de las opciones típicas ($n \geq 2$), usar la menor cantidad de puntos ($n = 2$) produce la aproximación con mayor error (más inexacta).

PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] Datos de presión normalizada: $(0, 3), (2, 4.5), (3, 6)$. Utilizando un **spline cúbico natural**:

[Image of cubic spline interpolation]

a).[1.5 pts] Calcule los polinomios cúbicos del spline $S_0(x)$ y $S_1(x)$.

Solución:

Datos: $x_0 = 0, x_1 = 2, x_2 = 3$. Pasos: $h_0 = 2, h_1 = 1$.

Spline Natural $\implies M_0 = 0, M_2 = 0$.

Sistema para M_1 :

$$\begin{aligned} 2(h_0 + h_1)M_1 &= 6 \left[\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right] \\ 2(3)M_1 &= 6 \left[\frac{1.5}{1} - \frac{1.5}{2} \right] = 6[1.5 - 0.75] = 6(0.75) \\ 6M_1 &= 4.5 \implies \mathbf{M_1 = 0.75} \end{aligned}$$

Coefficientes S_0 ($x \in [0, 2]$):

$$\bullet a_0 = \frac{0.75-0}{12} = 0.0625, \quad b_0 = 0$$

$$\bullet c_0 = \frac{1.5}{2} - \frac{2(0.75)}{6} = 0.75 - 0.25 = 0.5, \quad d_0 = 3$$

$$\mathbf{S_0(x) = 0.0625x^3 + 0.5x + 3}$$

Coefficientes S_1 ($x \in [2, 3]$):

$$\bullet a_1 = \frac{0-0.75}{6} = -0.125, \quad b_1 = \frac{0.75}{2} = 0.375$$

$$\bullet c_1 = \frac{1.5}{1} - \frac{1(0+1.5)}{6} = 1.5 - 0.25 = 1.25, \quad d_1 = 4.5$$

$$\mathbf{S_1(x) = -0.125(x-2)^3 + 0.375(x-2)^2 + 1.25(x-2) + 4.5}$$

b).[1.5 pts] Calcule el valor aproximado en $x = 2.5$ y la segunda derivada en $x = 0.8$.

Solución:

•**Para $x = 2.5$:** Usamos $S_1(x)$ pues $2.5 \in [2, 3]$.

$$S_1(2.5) = -0.125(0.5)^3 + 0.375(0.5)^2 + 1.25(0.5) + 4.5$$

$$S_1(2.5) = -0.0156 + 0.0938 + 0.625 + 4.5 = \mathbf{5.2032}$$

•**Para $x = 0.8$:** Usamos $S_0''(x)$ pues $0.8 \in [0, 2]$.

$$S_0''(x) = 6a_0(x - x_0) + 2b_0$$

$$S_0''(0.8) = 6(0.0625)(0.8) + 0 = 0.375(0.8) = \mathbf{0.3000}$$

4.[3 pts] Modelo curva de Laffer $R(t) = \frac{at}{1+bt}$. Datos usados: $(2, 1), (3, 4), (4, 6)$. Estime para $t = 2.8\%$.

Solución:

Linealización: $\frac{1}{R} = \frac{1+bt}{at} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{t} \right) + \frac{b}{a}$.

Modelo lineal: $Y = AX + B$, donde $Y = 1/R$, $X = 1/t$, $A = 1/a$, $B = b/a$.

t	R	$X = 1/t$	$Y = 1/R$	XY
2	1	0.5000	1.0000	0.5000
3	4	0.3333	0.2500	0.0833
4	6	0.2500	0.1667	0.0417
Σ		1.0833	1.4167	0.6250

Sistema Normal ($\Sigma X^2 = 0.4236$):

$$\begin{bmatrix} 0.4236 & 1.0833 \\ 1.0833 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6250 \\ 1.4167 \end{bmatrix}$$

Resolviendo el sistema: $A \approx 3.5000$, $B \approx -0.7917$.

Recuperando parámetros:

$$a = 1/A = \mathbf{0.2857}, \quad b = B \cdot a = \mathbf{-0.2262}$$

Estimación para $t = 2.8$:

$$R(2.8) = \frac{0.2857(2.8)}{1 - 0.2262(2.8)} = \frac{0.8000}{1 - 0.6334} = \frac{0.8000}{0.3666} \approx \mathbf{2.1822} \text{ millones \$}$$

APLICACIÓN

5Flujo entre cilindros concéntricos. Ecuación: $u'' + \frac{1}{r}u' - \frac{1}{r^2}u = 0$. $R_{min} = 0.05$, $R_{max} = 0.08$.
 $u(0.05) = 0$, $u(0.08) = 0.4$.

a)[4 pts] Plantee los 2 PVI para el método del disparo y sus sistemas.

Solución:

Transformamos a sistema de 1er orden: $y_1 = u$, $y_2 = u'$.

$$y_2' = -\frac{1}{r}y_2 + \frac{1}{r^2}y_1$$

PVI 1 (Homogéneo - Parte A): $u_1(0.05) = 0$, $u_1'(0.05) = 0$.

$$\mathbf{z}' = \begin{bmatrix} z_2 \\ \frac{1}{r^2}z_1 - \frac{1}{r}z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{z}(0.05) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

PVI 2 (Homogéneo - Parte B): $u_2(0.05) = 0$, $u_2'(0.05) = 1$.

$$\mathbf{w}' = \begin{bmatrix} w_2 \\ \frac{1}{r^2}w_1 - \frac{1}{r}w_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{w}(0.05) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

b)[4 pts] Aplique Euler ($\Delta r = 0.01$) al segundo PVI y complete la tabla.

Solución:

PVI 1: Condiciones iniciales nulas en EDO homogénea implican $u_1(r) = 0$ siempre.

PVI 2 (Cálculos): $u_2(0.05) = 0, v(0.05) = 1$.

• $r = 0.05$: $k_{1u} = 1, k_{1v} = \frac{0}{r^2} - \frac{1}{0.05}(1) = -20$. $u(0.06) = 0 + 0.01(1) = \mathbf{0.01}$, $v(0.06) = 1 + 0.01(-20) = \mathbf{0.8}$.

• $r = 0.06$: $k_{1u} = 0.8, k_{1v} = \frac{0.01}{0.06^2} - \frac{0.8}{0.06} = 2.778 - 13.333 = -10.5556$. $u(0.07) = 0.01 + 0.01(0.8) = \mathbf{0.0180}$, $v(0.07) = 0.8 + 0.01(-10.556) = \mathbf{0.6944}$.

• $r = 0.07$: $k_{1u} = 0.6944, k_{1v} = \frac{0.018}{0.07^2} - \frac{0.6944}{0.07} = 3.673 - 9.920 = -6.2465$. $u(0.08) = 0.018 + 0.01(0.6944) = \mathbf{0.0249}$.

r	u_2	v	k_{1u}	k_{1v}
0.05	0	1	1	-20
0.06	0.0100	0.8000	0.8000	-10.5556
0.07	0.0180	0.6944	0.6944	-6.2465
0.08	0.0249	0.6319	—	—

c)[2 pts] Aplique el método del disparo para hallar u_{aprox} .

Solución:

Combinación: $u(r) = u_1(r) + \lambda u_2(r)$. Como $u_1 = 0$:

$$\lambda = \frac{u_{frontera} - u_1(0.08)}{u_2(0.08)} = \frac{0.4 - 0}{0.0249} = \mathbf{16.0643}$$

Calculamos $u(r) = 16.0643 \cdot u_2(r)$:

• $r = 0.06$: $16.0643(0.0100) = 0.1606$

• $r = 0.07$: $16.0643(0.0180) = 0.2892$

• $r = 0.08$: $16.0643(0.0249) = 0.4000$

r	u_{aprox}
0.05	0.0000
0.06	0.1606
0.07	0.2892
0.08	0.4000