

[Cod: CC2104]

[Curso: Métodos Numéricos]

Solucionario Examen Final Modelo 2

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

- 1.[2 pts] El orden de error de la fórmula de diferencias finitas centradas es el mismo que el orden de error de la fórmula de diferencias finitas hacia adelante.

Solución:

Respuesta: FALSO (F)

Justificación: La fórmula de **diferencia hacia adelante** (o hacia atrás) tiene un error de truncamiento de orden $O(h)$. Por el contrario, la fórmula de **diferencia centrada** elimina el término de primer orden en la expansión de Taylor, lo que da lugar a un error de truncamiento de orden $O(h^2)$. Al tener órdenes de convergencia distintas (h vs h^2), la proposición es falsa.

- 2.[2 pts] Respecto al cálculo de la integral $I = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$. El valor más inexacto que se obtiene con la cuadratura Gaussiana ocurre cuando se considera 1 punto.

Solución:

Respuesta: VERDADERO (V)

Justificación: La cuadratura de Gauss-Legendre con $n+1$ puntos es exacta para polinomios de grado hasta $2n+1$.

- Con $n+1=1$, es exacta para polinomios de grado 1 (lineales).
- Con $n+1=2$, es exacta para polinomios de grado 3, etc.

Dado que el integrando $f(x) = e^{-x^2}$ no es un polinomio, el error de aproximación disminuye conforme aumentamos el número de puntos. Por lo tanto, usar $n+1=1$ proporciona la aproximación más pobre (mayor error) que usar más puntos.

PROCEDIMENTAL

- 3.[3 pts] En un experimento oceanográfico se registran valores de presión normalizada... $(0, 1)$, $(0.5, 2.3)$, $(1, 3.5)$. Utilizando un **spline cúbico natural**:

- a).[1.5 pts] Calcule los polinomios cúbicos del spline $S_0(x)$ y $S_1(x)$.

Solución:

Datos: $x_0 = 0, x_1 = 0.5, x_2 = 1$. Pasos: $h_0 = 0.5, h_1 = 0.5$.

Spline natural $\implies M_0 = 0, M_2 = 0$.

Sistema para M_1 :

$$2(h_0 + h_1)M_1 = 6 \left[\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right]$$

$$2(1)M_1 = 6 \left[\frac{1.2}{0.5} - \frac{1.3}{0.5} \right] = 6[2.4 - 2.6] = 6(-0.2) = -1.2 \implies \mathbf{M_1 = -0.6}$$

Coefficientes S_0 ($x \in [0, 0.5]$):

$$\bullet a_0 = \frac{-0.6-0}{3} = -0.2, \quad b_0 = 0$$

$$\bullet c_0 = \frac{1.3}{0.5} - \frac{0.5(-0.6)}{6} = 2.6 + 0.05 = 2.65, \quad d_0 = 1$$

$$\mathbf{S_0(x) = -0.2x^3 + 2.65x + 1}$$

Coefficientes S_1 ($x \in [0.5, 1]$):

$$\bullet a_1 = \frac{0-(-0.6)}{3} = 0.2, \quad b_1 = \frac{-0.6}{2} = -0.3$$

$$\bullet c_1 = \frac{1.2}{0.5} - \frac{0.5(0+2(-0.6))}{6} = 2.4 + 0.1 = 2.5, \quad d_1 = 2.3$$

$$\mathbf{S_1(x) = 0.2(x - 0.5)^3 - 0.3(x - 0.5)^2 + 2.5(x - 0.5) + 2.3}$$

b). [1.5 pts] Calcule el valor aproximado en $x = 0.3$ y la segunda derivada en $x = 0.8$.

Solución:

•**Para $x = 0.3$:** Usamos S_0 pues $0.3 \in [0, 0.5]$.

$$S_0(0.3) = -0.2(0.3)^3 + 2.65(0.3) + 1 = -0.0054 + 0.795 + 1 = \mathbf{1.7896}$$

•**Para $x = 0.8$:** Usamos S_1'' pues $0.8 \in [0.5, 1]$.

$$S_1''(x) = 6a_1(x - x_1) + 2b_1$$

$$S_1''(0.8) = 6(0.2)(0.8 - 0.5) + 2(-0.3) = 1.2(0.3) - 0.6 = 0.36 - 0.6 = \mathbf{-0.24}$$

4. [3 pts] Modelo curva de Laffer $R(t) = \frac{at}{1+bt}$. Datos: $(2, 3), (3, 5), (4, 8)$. Estime para $t = 3.8\%$.

Solución:**Linealización:** $\frac{1}{R} = \frac{1+bt}{at} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{t} \right) + \frac{b}{a}$.Modelo: $Y = A_1 X + A_0$, donde $Y = 1/R$, $X = 1/t$, $A_1 = 1/a$, $A_0 = b/a$.

t	R	$X = 1/t$	$Y = 1/R$	XY
2	3	0.5000	0.3333	0.1667
3	5	0.3333	0.2000	0.0667
4	8	0.2500	0.1250	0.0313
Σ		1.0833	0.6583	0.2647

Sistema Normal ($\Sigma X^2 = 0.4236$):

$$\begin{bmatrix} 0.4236 & 1.0833 \\ 1.0833 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2647 \\ 0.6583 \end{bmatrix}$$

Resolviendo: $A_1 = 0.8325$, $A_0 = -0.0802$.

Recuperando parámetros:

$$a = 1/A_1 = \mathbf{1.2012}, \quad b = A_0 \cdot a = \mathbf{-0.0963}$$

Estimación para $t = 3.8$:

$$R(3.8) = \frac{1.2012(3.8)}{1 - 0.0963(3.8)} = \frac{4.5646}{0.6341} \approx \mathbf{7.1985} \text{ millones \$}$$

APLICACIÓN

5. Un flujo laminar, incompresible y totalmente desarrollado...

a) [4 pts] Plantee los 2 PVI para el método del disparo y sus sistemas.

Solución:

La ecuación diferencial está dada por:

$$u'' = -\frac{1}{r} u' + \frac{1}{r^2} u$$

con $u(0.10) = 0 = \alpha$, y $u(0.16) = 0.32 = \beta$

PVI 1

$$\begin{cases} u'' = -\frac{1}{r} u' + \frac{1}{r^2} u \\ u(0.10) = 0, \quad u'(0.10) = 0 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $v_1 = u$ y $v_2 = u'$, se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} v_1' = v_2 & , \quad v_1(0.10) = 0 \\ v_2' = -\frac{1}{r} v_2 + \frac{1}{r^2} v_1 & , \quad v_2(0.10) = 0 \end{cases}$$

PVI 2

$$\begin{cases} u'' = -\frac{1}{r} u' + \frac{1}{r^2} u \\ u(0.10) = 0, \quad u'(0.10) = 1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $v_1 = u$ y $v_2 = u'$, se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} v_1' = v_2 & , \quad v_1(0.10) = 0 \\ v_2' = -\frac{1}{r} v_2 + \frac{1}{r^2} v_1 & , \quad v_2(0.10) = 1 \end{cases}$$

b)[4 pts] Aplique Euler ($\Delta r = 0.02$) al segundo PVI y complete la tabla.

Solución:

PVI 1: Del problema: $u_1(r) = 0$ para todo r .

PVI 2: Considerando $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{F}(r, V) = \begin{bmatrix} v_2 \\ -\frac{1}{r}v_2 + \frac{1}{r^2}v_1 \end{bmatrix}$, se aplica el método de Euler con $h = 0.02$ y se obtiene:

- **Iteración $i = 0$:** (no era necesario su desarrollo, dato del problema)

$$r_0 = 0, V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \mathbf{F}(r_0, V_0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{(0.10)}(1) + \frac{1}{(0.10)^2}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = V_0 + 0.02 \times k_1 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

- **Iteración $i = 1$:**

$$r_1 = 0.12, V_1 = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 0.8 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \mathbf{F}(r_1, V_1) = \begin{bmatrix} 0.08 \\ -\frac{1}{(0.12)}(0.8) + \frac{1}{(0.12)^2}(0.02) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 \\ -5.2778 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = V_1 + 0.02 \times k_1 = \begin{bmatrix} 0.036 \\ 0.6944 \end{bmatrix}$$

- **Iteración $i = 2$:**

$$r_2 = 0.14, V_2 = \begin{bmatrix} 0.036 \\ 0.6944 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \mathbf{F}(r_2, V_2) = \begin{bmatrix} 0.6944 \\ -\frac{1}{(0.14)}(0.6944) + \frac{1}{(0.14)^2}(0.036) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.6944 \\ -3.1233 \end{bmatrix}$$

$$V_3 = V_2 + 0.02 \times k_1 = \begin{bmatrix} 0.0499 \\ 0.6319 \end{bmatrix}$$

Completando en la tabla:

r	u_2	v	k_{1u}	k_{1v}
0.10	0	1	1	-10
0.12	0.0200	0.8000	0.8000	-5.2778
0.14	0.0360	0.6944	0.6944	-3.1233
0.16	0.0499	0.6319	—	—

c)[2 pts] Aplique el método del disparo para hallar u_{aprox} .

Solución:

La solución es $u(r) = u_1(r) + \lambda u_2(r)$.

$$\lambda = \frac{\beta - u_1(0.16)}{u_2(0.16)} = \frac{0.32 - 0}{0.0499} = \mathbf{6.4128}$$

Calculamos $u(r) = 0 + 6.4128 \cdot u_2(r)$:

- Para $r = 0.10 \longrightarrow 0 + 6.4128(0) = 0$
- Para $r = 0.12 \longrightarrow 0 + 6.4128(0.0200) = 0.1283$
- Para $r = 0.14 \longrightarrow 0 + 6.4128(0.0360) = 0.2309$
- Para $r = 0.16 \longrightarrow 0 + 6.4128(0.0499) = 0.3200$

Luego, la tabla final es la siguiente:

r	u_{approx}
0.10	0.0000
0.12	0.1283
0.14	0.2309
0.16	0.3200