

Solucionario Examen Final Modelo 1

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 pts] Si $f(x)$ solo se conoce en puntos discretos, al trabajar con fórmulas de integración de newton-cotes, sustituir la derivada $f^{(n)}(\xi)$ del término de error por su aproximación en diferencias finitas nos entrega una estimación del error, pero no una cota superior matemáticamente rigurosa.

Solución:

Respuesta: VERDADERO (V)

Justificación: El término del error de truncamiento en las fórmulas de Newton-Cotes depende de la derivada de orden superior $f^{(n)}(\xi)$ evaluada en un punto desconocido ξ del intervalo de integración.

Para obtener una *cota superior rigurosa*, es necesario conocer el valor máximo absoluto de dicha derivada en todo el intervalo: $M = \max |f^{(n)}(x)|$.

Al disponer únicamente de datos tabulados (discretos), desconocemos el comportamiento de la función $f(x)$ en los espacios entre los puntos. Aunque las diferencias finitas permiten *estimar* el valor de la derivada asumiendo un comportamiento suave, no pueden garantizar que la función no presente oscilaciones bruscas entre los nodos que excedan dicha estimación. Por tanto, el valor obtenido es una aproximación del error y no una cota matemática estricta.

2. [2 pts] Respecto al cálculo de la integral $I = \int_{-1}^1 e^{-x^2} dx$. El método de Romberg mejora dos o más aproximaciones iniciales del método del trapecio compuesto (con $n = 1; 2; 4; 8 \dots 2^p$ intervalos donde $p \geq 1$).

Solución:

Respuesta: VERDADERO (V)

Justificación: El método de Romberg se basa en la Extrapolación de Richardson. Utiliza aproximaciones obtenidas mediante la regla del trapecio con pasos h y $h/2$ para eliminar el término de error de orden $O(h^2)$, generando así una nueva aproximación de orden $O(h^4)$. Este proceso se repite iterativamente mejorando la precisión de las aproximaciones iniciales.

PROCEDIMENTAL

3.[3 pts] En un laboratorio de vibraciones mecánicas se registra el **desplazamiento vertical** y (en mm) de un punto de una viga durante una prueba de impacto. Las mediciones realizadas en función del tiempo t (en segundos) son las siguientes: (0; 2.5), (1; 1.2), (2; 3.1). Utilizando un **spline cúbico natural** que interpole estos tres puntos:

a).[1.5 pts] Calcule los polinomios cúbicos del spline:

$$S_0(x) = a_0(x - x_0)^3 + b_0(x - x_0)^2 + c_0(x - x_0) + d_0, \quad x \in [0; 1]$$

$$S_1(x) = a_1(x - x_1)^3 + b_1(x - x_1)^2 + c_1(x - x_1) + d_1, \quad x \in [1; 2]$$

Solución:

Datos: $h_0 = 1, h_1 = 1$. Spline natural $\implies M_0 = 0, M_2 = 0$.

Sistema para el nodo interior M_1 :

$$2(h_0 + h_1)M_1 = 6 \left[\frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{y_1 - y_0}{h_0} \right]$$

$$4M_1 = 6 \left[\frac{3.1 - 1.2}{1} - \frac{1.2 - 2.5}{1} \right] = 6[1.9 - (-1.3)] = 19.2 \implies \mathbf{M_1 = 4.8}$$

Coefficientes Intervalo 1 (S_0):

$$\bullet a_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = \frac{4.8}{6} = 0.8, \quad b_0 = \frac{M_0}{2} = 0$$

$$\bullet c_0 = \frac{y_1 - y_0}{h_0} - \frac{h_0(M_1 + 2M_0)}{6} = -1.3 - \frac{4.8}{6} = -2.1, \quad d_0 = 2.5$$

Coefficientes Intervalo 2 (S_1):

$$\bullet a_1 = \frac{M_2 - M_1}{6h_1} = \frac{-4.8}{6} = -0.8, \quad b_1 = \frac{M_1}{2} = 2.4$$

$$\bullet c_1 = \frac{y_2 - y_1}{h_1} - \frac{h_1(M_2 + 2M_1)}{6} = 1.9 - \frac{9.6}{6} = 0.3, \quad d_1 = 1.2$$

$$S_0(x) = 0.8x^3 - 2.1x + 2.5$$

$$S_1(x) = -0.8(x - 1)^3 + 2.4(x - 1)^2 + 0.3(x - 1) + 1.2$$

b).[1.5 pts] Calcule el valor aproximado del desplazamiento en el instante $t = 0.6$ s. y la **segunda derivada** del spline (aceleración aproximada) en el instante $t = 1.5$ s.

Solución:

1)**Para** $t = 0.6$: Usamos $S_0(x)$ ya que $0.6 \in [0, 1]$.

$$S_0(0.6) = 0.8(0.6)^3 - 2.1(0.6) + 2.5 = 0.1728 - 1.26 + 2.5 = \mathbf{1.4128 \text{ mm}}$$

2)**Para** $t = 1.5$: Usamos $S_1''(x)$ ya que $1.5 \in [1, 2]$. La segunda derivada es $S_1''(x) = 6a_1(x - 1) + 2b_1$.

$$S_1''(1.5) = 6(-0.8)(1.5 - 1) + 2(2.4) = -2.4 + 4.8 = \mathbf{2.4 \text{ mm/s}^2}$$

- 4.[3 pts] El Departamento de Energía de un país ha registrado datos históricos... Se desea modelar esta relación utilizando una curva de Laffer del tipo

$$R(t) = \frac{at}{1 + bt}.$$

A partir de los datos presentados en la siguiente tabla:

t	(%)	2	3	5
R	(millones de \$)	4	7	11

aplicando el método de mínimos cuadrados y luego de determinar los parámetros a y b , estime la recaudación fiscal que se obtendrá para una tasa impositiva de $t = 4\%$.

Solución:

Linealización: Invertimos la ecuación: $\frac{1}{R} = \frac{1+bt}{at} = \frac{1}{at} + \frac{b}{a}$.

Modelo lineal: $Y = A_1X + A_0$, donde $Y = 1/R$, $X = 1/t$, $A_1 = 1/a$, $A_0 = b/a$.

t	R	$X = 1/t$	$Y = 1/R$	XY
2	4	0.5000	0.2500	0.1250
3	7	0.3333	0.1429	0.0476
5	11	0.2000	0.0909	0.0182
Σ		1.0333	0.4838	0.1908

Sistema Normal ($\Sigma X^2 = 0.4011$):

$$\begin{bmatrix} 0.4011 & 1.0333 \\ 1.0333 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1908 \\ 0.4838 \end{bmatrix}$$

Resolviendo: $A_1 = 0.5347$, $A_0 = -0.0229$.

Recuperando parámetros:

$$a = 1/A_1 = \mathbf{1.8702}, \quad b = A_0 \cdot a = -0.0229(1.8702) = \mathbf{-0.0428}$$

Estimación para $t = 4$:

$$R(4) = \frac{1.8702(4)}{1 - 0.0428(4)} = \frac{7.4808}{0.8288} \approx \mathbf{9.0261} \text{ millones \$}$$

APLICACIÓN

- 5 En un estudio de la mecánica... ecuación de movimiento:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \gamma \frac{dx}{dt} + f(t)$$

Considere:

$$m = \frac{1}{5}, \quad k = 2, \quad \gamma = 1.2 \quad f(t) = 5 \cos 4t$$

Además, se sabe que el cuerpo parte del reposo desde una posición de 0.5 m.

- a)[3 pts] Escriba el problema de valor inicial de segundo orden como un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden con condiciones iniciales $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$. Indique cada elemento $\mathbf{y}$, $\mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}_0$.

Solución:

El PVI de segundo orden es

$$x'' = -10x - 6x' + 25 \cos(4t), \quad x(0) = 0.5, \quad x'(0) = 0.$$

Definimos las variables del sistema:

$$y_1(t) = x(t), \quad y_2(t) = x'(t) = v(t).$$

Entonces:

$$\begin{cases} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= -10y_1 - 6y_2 + 25 \cos(4t). \end{cases}$$

El PVI de primer orden es $\mathbf{y}' = F(t, \mathbf{y})$, $\mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0$ donde

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}, \quad F(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} y_2 \\ -10y_1 - 6y_2 + 25 \cos(4t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

- b)[5 pts] Aplique el método de Runge–Kutta de orden 2 (Heun) con paso $\Delta t = 0.5$ s para aproximar la posición luego de 1.5 segundos. Muestre todos los cálculos. Complete la tabla siguiente con los resultados obtenidos.

Solución:

Consideramos el tamaño de paso $h = 0.5$ y de las iteraciones previas:

$$t_2 = 1.0, \quad \mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} 1.4123 \\ -8.6971 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de $\mathbf{k}_1$:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{F} \left(1.0, \begin{bmatrix} 1.4123 \\ -8.6971 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} -8.6971 \\ 21.7187 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de $\mathbf{k}_2$:

$$\mathbf{y}_2 + h\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 1.4123 \\ -8.6971 \end{bmatrix} + 0.5000 \begin{bmatrix} -8.6971 \\ 21.7187 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2.9363 \\ 2.1623 \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{F} \left(1.5, \begin{bmatrix} -2.9363 \\ 2.1623 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 2.1623 \\ 40.3933 \end{bmatrix}.$$

Cálculo de $\mathbf{y}_3$:

$$\mathbf{y}_3 = \mathbf{y}_2 + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 1.4123 \\ -8.6971 \end{bmatrix} + 0.25 \begin{bmatrix} -6.5348 \\ 62.1120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.2214 \\ 6.8309 \end{bmatrix}.$$

Así, la tabla de resultados es:

t	x	v	k_{1x}	k_{1v}	k_{2x}	k_{2v}
1.0	1.4123	-8.6971	-8.6971	21.7187	2.1623	40.3933
1.5	-0.2214	6.8309	—	—	—	—

La aproximación de la posición luego de 1.5 segundos es:

$$x(1.5) \approx -0.2214$$

- c) [2 pts] Explique si la solución obtenida con el método de Heun sería más precisa, igual o menos precisa al reducir el paso de $\Delta t = 0.5$ a $\Delta t = 0.25$. **Justifique su respuesta.**

Solución:

Respuesta: MÁS PRECISA.

Justificación: El método de Heun es un esquema de Runge-Kutta de segundo orden, lo que significa que su error de truncamiento local es proporcional a $O(h^3)$ y el error global es de orden $O(h^2)$. Al reducir el paso h a la mitad (de 0.5 a 0.25), el error global teórico se reduce aproximadamente a una cuarta parte. Además, al usar un paso más fino, el promedio de las pendientes (inicial y predictora) captura con mayor fidelidad los cambios de curvatura de la función, especialmente en sistemas oscilatorios como este.