

Métodos Numéricos
Examen de Rezagados
Pregrado
2025-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna. Solo el contenido de este cuadernillo será calificado.

Apellidos y Nombres:

Duración 110 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] En un problema de ajuste lineal $y = a_1x + a_0$, si el coeficiente de correlación r es igual a cero, esto implica necesariamente que la suma de los residuos cuadráticos (S_r) es estrictamente menor que la suma total de cuadrados (S_t).

Solución:

El coeficiente de correlación r mide la fuerza de la relación lineal entre x e y , la suma de los residuos cuadráticos es $S_r = \sum_{i=1}^n (y_i - a_1x_i - a_0)^2$, la suma total de cuadrados es $S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ y el coeficiente de determinación está dado por:

$$r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$$

o equivalentemente,

$$S_r = S_t(1 - r^2)$$

Si $r = 0 \Rightarrow r^2 = 0$:

$$S_r = S_t(1 - 0) = S_t$$

Por lo tanto, **la suma de los residuos cuadráticos es igual a la suma total de cuadrados**, no estrictamente menor. Esto ocurre cuando el modelo ajustado no mejora la predicción respecto a simplemente usar la media de los datos ($\bar{y}$).

Conclusión: La proposición es **Falsa**, ya que $S_r = S_t$ cuando $r = 0$.

2. [2 ptos] Se desea resolver la ecuación $f(x) = \cos(x) - x$ mediante el método de Newton-Raphson, usando como valor inicial $x_0 = 0.5$. Sabemos que el método presenta convergencia cuadrática cerca de la raíz. Más aún, se sabe que el error absoluto en la iteración n está acotado de la siguiente manera

$$e_n = |x_n - x^*| \leq \frac{1}{2} 2^n$$

donde x^* es la raíz exacta.

Indique si la siguiente afirmación es Verdadera (**V**) o Falsa (**F**):

Para asegurar que el error absoluto sea menor que 10^{-5} , basta con realizar 4 iteraciones del método de Newton-Raphson.

Solución:

Según el enunciado, el error absoluto en la iteración n está acotado por:

$$e_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}$$

Queremos que $e_n < 10^{-5}$. Probemos con $n = 4$:

$$2^4 = 16 \qquad e_4 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{16} = \frac{1}{2^{16}} = \frac{1}{65536} \approx 1.5259 \times 10^{-5}$$

Observa que $e_4 \approx 1.53 \times 10^{-5}$, que **NO** es menor que 10^{-5} . Por tanto, **no basta con 4 iteraciones** para asegurar el error absoluto menor que 10^{-5} . Si probamos con $n = 5$:

$$2^5 = 32 \qquad e_5 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{32} = \frac{1}{2^{32}} \approx 2.328 \times 10^{-10} < 10^{-5}$$

Por lo tanto, **se necesitan al menos 5 iteraciones** para garantizar el error requerido.
Conclusión:

La afirmación es **Falsa**, ya que 4 iteraciones no son suficientes para asegurar que el error absoluto sea menor que 10^{-5} .

PROCEDIMENTAL

3. [3 pts] Considere la ecuación de Poisson en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

con condiciones de frontera homogéneas:

$$u(x, 0) = u(x, 1) = u(0, y) = u(1, y) = 0$$

Se discretiza la región con un paso $h = 0.5$, generando una malla de 3×3 , con cuatro nodos interiores numerados como u_1, u_2, u_3, u_4 . Suponga que $f(x, y) = 1$ en todos los nodos interiores.

El sistema lineal resultante de la discretización es el siguiente:

$$-4u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -0.25$$

$$u_1 - 4u_2 + u_4 = -0.25$$

$$u_1 - 4u_3 + u_4 = -0.25$$

$$u_1 + u_2 + u_3 - 4u_4 = -0.25$$

- a. [1 pts] Escriba el sistema anterior en **forma matricial** $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, y determine si el método de **Gauss-Seidel** es convergente (justifique su respuesta).

Solución:

El sistema puede escribirse como $A\mathbf{u} = \mathbf{b}$, donde:

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -0.25 \\ -0.25 \\ -0.25 \\ -0.25 \end{bmatrix}$$

¿Es convergente el método de Gauss-Seidel? Para que el método de Gauss-Seidel sea convergente, una condición suficiente es que la matriz A sea **diagonalmente dominante**, es decir, para cada fila:

$$|a_{ii}| \geq \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

Verifiquemos esto para cada fila:

- **Fila 1:** $|-4| = 4, \sum_{j \neq 1} |a_{1j}| = 1 + 1 + 1 = 3 \quad 4 > 3$
- **Fila 2:** $|-4| = 4, 1 + 0 + 1 = 2 \quad 4 > 2$
- **Fila 3:** $|-4| = 4, 1 + 0 + 1 = 2 \quad 4 > 2$
- **Fila 4:** $|-4| = 4, 1 + 1 + 1 = 3 \quad 4 > 3$

La matriz A es **estrictamente diagonalmente dominante**, por lo tanto, el método de Gauss-Seidel **es convergente** para este sistema.

Conclusión:

El método de Gauss-Seidel es convergente porque la matriz A es estrictamente diagonalmente dominante.

- b. [2 pts] Realice dos iteraciones del método de **Gauss-Seidel** utilizando como aproximación inicial: $\mathbf{u}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5]^T$

Solución:

$$-4u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = -0.25$$

$$u_1 - 4u_2 + u_4 = -0.25$$

$$u_1 - 4u_3 + u_4 = -0.25$$

$$u_1 + u_2 + u_3 - 4u_4 = -0.25$$

las fórmulas recursivas para cada iteración son:

$$u_1^{(k+1)} = \frac{-0.25 - u_2^{(k)} - u_3^{(k)} - u_4^{(k)}}{-4}$$

$$u_2^{(k+1)} = \frac{-0.25 - u_1^{(k+1)} - u_4^{(k)}}{-4}$$

$$u_3^{(k+1)} = \frac{-0.25 - u_1^{(k+1)} - u_4^{(k)}}{-4}$$

$$u_4^{(k+1)} = \frac{-0.25 - u_1^{(k+1)} - u_2^{(k+1)} - u_3^{(k+1)}}{-4}$$

Iteración 1 ($k = 0$), con $\mathbf{u}^{(0)} = [0 \ 0 \ 0.5 \ 0.5]^T$:

$$u_1^{(1)} = \frac{-0.25 - 0 - 0.5 - 0.5}{-4} = \frac{-1.25}{-4} = 0.3125$$

$$u_2^{(1)} = \frac{-0.25 - 0.3125 - 0.5}{-4} = \frac{-1.0625}{-4} = 0.2656$$

$$u_3^{(1)} = \frac{-0.25 - 0.3125 - 0.5}{-4} = 0.2656$$

$$u_4^{(1)} = \frac{-0.25 - 0.3125 - 0.2656 - 0.2656}{-4} = \frac{-1.0937}{-4} = 0.2734$$

Iteración 2 ($k = 1$), usando los valores de la iteración anterior:

$$u_1^{(2)} = \frac{-0.25 - 0.2656 - 0.2656 - 0.2734}{-4} = \frac{-1.0546}{-4} = 0.2637$$

$$u_2^{(2)} = \frac{-0.25 - 0.2637 - 0.2734}{-4} = \frac{-0.7871}{-4} = 0.1968$$

$$u_3^{(2)} = \frac{-0.25 - 0.2637 - 0.2734}{-4} = 0.1968$$

$$u_4^{(2)} = \frac{-0.25 - 0.2637 - 0.1968 - 0.1968}{-4} = \frac{-0.9073}{-4} = 0.2268$$

Aproximaciones después de dos iteraciones:

$$\mathbf{u}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0.3125 \\ 0.2656 \\ 0.2656 \\ 0.2734 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0.2637 \\ 0.1968 \\ 0.1968 \\ 0.2268 \end{bmatrix}$$

4. [3 pts] Considere la siguiente integral doble:

$$I = \int_{-1}^1 h(x) dx, \quad h(x) = \int_0^1 e^{x^2+xy} dy.$$

Se desea aproximar el valor de esta integral I utilizando el método de **cuadratura gaussiana**. Para ello realice lo siguiente:

- a. [2 pts] Complete la siguiente tabla. Para aproximar las integrales $h(x_i)$ use cuadratura Gaussiana de **2 puntos** (indique el cambio de variable usado).

x_i	$h(x_i)$
$-\sqrt{\frac{1}{3}}$	
$\sqrt{\frac{1}{3}}$	

Solución:

Queremos aproximar

$$h(x) = \int_0^1 e^{x^2+xy} dy$$

usando cuadratura Gaussiana de 2 puntos en $[0, 1]$.

1. Cambio de variable (de $[-1, 1]$ a $[0, 1]$): La cuadratura Gaussiana estándar en $[-1, 1]$ tiene nodos $t_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \approx -0.577$, $t_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}} \approx 0.577$, y ambos pesos $w_1 = w_2 = 1$. Para integrar en $y \in [0, 1]$, usamos el cambio:

$$y = \frac{1}{2}(t + 1)$$

$$dy = \frac{1}{2}dt$$

Así, la integral se transforma:

$$h(x) = \int_0^1 e^{x^2+xy} dy = \int_{-1}^1 e^{x^2+x\frac{1}{2}(t+1)} \cdot \frac{1}{2}dt$$

Aplicando la fórmula de cuadratura Gaussiana:

$$h(x) \approx \frac{1}{2} \left[e^{x^2+xy_1} + e^{x^2+xy_2} \right]$$

donde

$$y_1 = \frac{1}{2}(t_1 + 1) = \frac{1}{2}(1 - 0.577) = 0.211$$

$$y_2 = \frac{1}{2}(t_2 + 1) = \frac{1}{2}(1 + 0.577) = 0.789$$

2. Cálculo para $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{3}} \approx -0.577$

$$x_1 = -0.577$$

$$x_1^2 = 0.333$$

$$\begin{aligned} h(x_1) &\approx \frac{1}{2} \left[e^{0.333+(-0.577) \cdot 0.211} + e^{0.333+(-0.577) \cdot 0.789} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{0.333-0.122} + e^{0.333-0.456} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{0.211} + e^{-0.123} \right] \end{aligned}$$

$$e^{0.211} \approx 1.235$$

$$e^{-0.123} \approx 0.884$$

$$h(x_1) \approx \frac{1}{2}(1.235 + 0.884) = 1.059$$

3. Cálculo para $x_2 = +\sqrt{\frac{1}{3}} \approx 0.577$

$$x_2 = 0.577$$

$$x_2^2 = 0.333$$

$$\begin{aligned} h(x_2) &\approx \frac{1}{2} \left[e^{0.333+0.577 \cdot 0.211} + e^{0.333+0.577 \cdot 0.789} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{0.333+0.122} + e^{0.333+0.455} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[e^{0.455} + e^{0.788} \right] \end{aligned}$$

$$e^{0.455} \approx 1.576$$

$$e^{0.788} \approx 2.199$$

$$h(x_2) \approx \frac{1}{2}(1.576 + 2.199) = 1.888$$

4. Resumen de resultados: - Cambio de variable usado: $y = \frac{1}{2}(t + 1)$, $dy = \frac{1}{2}dt$
- Nodos en y : $y_1 = 0.211$, $y_2 = 0.789$ - $h(-0.577) \approx 1.059$ - $h(+0.577) \approx 1.888$ **Así, los valores aproximados para la tabla son:**

$$h(-\sqrt{1/3}) \approx 1.059, \quad h(+\sqrt{1/3}) \approx 1.888$$

- b. [1 pts] Use la información anterior para aproximar la integral I con el método de cuadratura gaussiana de **2 puntos**.

Solución:

Para la integral exterior, también usamos cuadratura Gaussiana de 2 puntos en $[-1, 1]$:

$$I \approx h(x_1) + h(x_2)$$

con pesos iguales a 1.

$$I \approx 1.059 + 1.888 = 2.947$$

$$\boxed{I \approx 2.95}$$

APLICACIONES

5. [10 ptos] En el diseño de un componente para un equipo de alto voltaje, se debe analizar el campo electrostático dentro de un aislador esférico. El aislador consta de dos esferas metálicas concéntricas. La esfera interior, de radio R_1 , se mantiene a un potencial eléctrico V_1 , mientras que la esfera exterior, de radio R_2 , está conectada a tierra (potencial cero).

El potencial eléctrico $u(r)$ en la región entre las esferas, como función de la distancia radial r desde el centro, está regido por la ecuación de Laplace, que para esta geometría se reduce a:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0$$

Las condiciones de frontera son: $u(R_1) = V_1$, $u(R_2) = 0$.

Parámetros de Diseño:

- Radio interior: $R_1 = 2$ plg
- Radio exterior: $R_2 = 4$ plg
- Potencial de la esfera interior: $V_1 = 110$ V

Un punto crítico es la calibración de un sensor en $r = 3$ plg, para lo cual se necesita estimar $u(3)$ mediante el método del disparo lineal.

- a) [3 ptos] Escriba la forma normal de este PVF. Plantee los 2 PVI requeridos para el método del disparo y sus correspondientes sistemas de EDO de primer orden en forma vectorial usando $v(r) = u'(r)$.

Solución:

1. Forma Normal del Problema de Valor de Frontera (PVF) La ecuación

diferencial dada es:

$$\frac{d^2u}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{du}{dr} = 0$$

Para escribirla en la forma normal $u'' = p(r)u' + q(r)u + f(r)$, despejamos u'' :

$$\frac{d^2u}{dr^2} = -\frac{2}{r} \frac{du}{dr}$$

Comparando con la forma estándar, identificamos los coeficientes:

- $p(r) = -\frac{2}{r}$
- $q(r) = 0$
- $f(r) = 0$

Las condiciones de frontera son $u(2) = 110 \text{ V}$ ($\alpha = 110$) y $u(4) = 0 \text{ V}$ ($\beta = 0$). **2.**

Planteamiento de los Problemas de Valor Inicial (PVI) **PVI 1:** Se resuelve la EDO completa con la primera condición de frontera y derivada nula.

$$u_1'' = -\frac{2}{r}u_1' \quad \text{con} \quad u_1(2) = 110, \quad u_1'(2) = 0$$

PVI 2: Se resuelve la EDO homogénea (igual a la original ya que $f(r) = 0$) con condición inicial nula y derivada unitaria.

$$u_2'' = -\frac{2}{r}u_2' \quad \text{con} \quad u_2(2) = 0, \quad u_2'(2) = 1$$

3. Sistemas de EDO de Primer Orden Usamos la sustitución $v(r) = u'(r)$, lo

que implica $v'(r) = u''(r)$. **Sistema para PVI 1:** Sea $v_1 = u_1'$, el sistema es:

$$\begin{aligned} \frac{du_1}{dr} &= v_1 \\ \frac{dv_1}{dr} &= -\frac{2}{r}v_1 \end{aligned}$$

En forma vectorial, si $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$:

$$\frac{d\mathbf{y}_1}{dr} = \begin{bmatrix} v_1 \\ -\frac{2}{r}v_1 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \mathbf{y}_1(2) = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Sistema para PVI 2: Sea $v_2 = u_2'$, el sistema es:

$$\begin{aligned} \frac{du_2}{dr} &= v_2 \\ \frac{dv_2}{dr} &= -\frac{2}{r}v_2 \end{aligned}$$

En forma vectorial, si $\mathbf{y}_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}$:

$$\frac{d\mathbf{y}_2}{dr} = \begin{bmatrix} v_2 \\ -\frac{2}{r}v_2 \end{bmatrix}, \quad \text{con} \quad \mathbf{y}_2(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- b) [3 ptos] Aproxime la solución del **primer** problema de valor inicial utilizando el **Runge-Kutta de segundo orden (Heun)** considerando un paso $h = 1$ plg. Complete la tabla siguiente con los resultados obtenidos.

r	u_1	v_1
2		
3		
4		

Solución: Se tiene:

Tabla Completada:

r	u_1	v_1
2	110	0
3	110	0
4	110	0

Procedimiento: Usamos el método de Heun para el sistema $\frac{dy_1}{dr} = \mathbf{f}(r, \mathbf{y}_1)$, con $\mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{f}(r, \mathbf{y}_1) = \begin{bmatrix} v_1 \\ -\frac{2}{r}v_1 \end{bmatrix}$. Las condiciones iniciales son $\mathbf{y}_1(2) = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $h = 1$. La fórmula de Heun es:

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2).$$

Paso 1: Cálculo de $\mathbf{y}_1(3)$ desde $\mathbf{y}_1(2)$ ($r_0 = 2$)

- $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(2, \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{y}_{\text{pred}} = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(3, \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{y}_1(3) = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Paso 2: Cálculo de $\mathbf{y}_1(4)$ desde $\mathbf{y}_1(3)$ ($r_1 = 3$)

- $\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(3, \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(4, \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.
- $\mathbf{y}_1(4) = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 110 \\ 0 \end{bmatrix}$.

- c) [2 pts] Aproxime la solución del **segundo** problema de valor inicial utilizando el **Runge-Kutta de segundo orden (Heun)** considerando un paso $h = 1$ plg. Complete la tabla siguiente con los resultados obtenidos.

r	u_2	v_2
2		
3		
4		

Solución:

Tabla Completada:

r	u_2	v_2
2	0	1
3	0.5	0.5
4	0.8333	0.2917

Procedimiento: Usaremos el método de Heun para el sistema $\frac{dy_2}{dr} = \mathbf{f}(r, \mathbf{y}_2)$, con condiciones iniciales $\mathbf{y}_2(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ y $h = 1$. **Paso 1: Calcular $\mathbf{y}_2(3)$ desde $\mathbf{y}_2(2)$**

($r_0 = 2$)

- Cálculo de $\mathbf{k}_1$:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(2, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{2}{2}(1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $\mathbf{k}_2$:

$$\mathbf{y}_{\text{pred}} = \mathbf{y}_2(2) + h\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(3, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{2}{3}(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Actualización:

$$\mathbf{y}_2(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Paso 2: Calcular $\mathbf{y}_2(4)$ desde $\mathbf{y}_2(3)$ ($r_1 = 3$)

- Cálculo de $\mathbf{k}_1$:

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{f}\left(3, \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -\frac{2}{3}(0.5) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

- Cálculo de $\mathbf{k}_2$:

$$\mathbf{y}_{\text{pred}} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0.5 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1/6 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2 = \mathbf{f}\left(4, \begin{bmatrix} 1 \\ 1/6 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -\frac{2}{4}(1/6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/12 \end{bmatrix}$$

- Actualización:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_2(4) &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\begin{bmatrix} 0.5 \\ -1/3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/12 \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2/3 \\ -5/12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/3 \\ -5/24 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5/6 \\ 7/24 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.8333 \\ 0.2917 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- d) [2 ptos] Aplique el **método del disparo lineal** para estimar $u(3)$. Compare con el valor real dado por $u(r) = \frac{V_1 R_1}{r} \left(\frac{R_2 - r}{R_2 - R_1} \right)$ y calcule el **error relativo porcentual**.

Solución:

Procedimiento: 1. Combinación Lineal y Cálculo de la Constante La

solución final es $u(r) = u_1(r) + C \cdot u_2(r)$. Usamos la condición de frontera $u(4) = 0$ y los valores calculados $u_1(4) = 110$ y $u_2(4) = 5/6$ para hallar C :

$$u(4) = u_1(4) + C \cdot u_2(4) \implies 0 = 110 + C \cdot \left(\frac{5}{6} \right)$$

Despejando C :

$$C = -\frac{110}{5/6} = -110 \cdot \frac{6}{5} = -22 \cdot 6 = -132$$

2. Estimación de $u(3)$ Ahora estimamos el potencial en $r = 3$ usando los valores de las tablas $u_1(3) = 110$ y $u_2(3) = 0.5$:

$$u_{approx}(3) = u_1(3) + C \cdot u_2(3) = 110 + (-132) \cdot (0.5) = 110 - 66 = 44 \text{ V}$$

3. Valor Real y Error Relativo Porcentual El valor real se calcula con la fórmula analítica dada:

$$u_{real}(3) = \frac{V_1 R_1}{3} \left(\frac{R_2 - 3}{R_2 - R_1} \right) = \frac{110 \cdot 2}{3} \left(\frac{4 - 3}{4 - 2} \right) = \frac{220}{3} \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{110}{3} \approx 36.6667 \text{ V}$$

El error relativo porcentual (ε_t) es:

$$\varepsilon_t = \left| \frac{\text{Valor Real} - \text{Valor Aproximado}}{\text{Valor Real}} \right| \times 100 \%$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{110/3 - 44}{110/3} \right| \times 100 \% = \left| \frac{110/3 - 132/3}{110/3} \right| \times 100 \%$$

$$\varepsilon_t = \left| \frac{-22/3}{110/3} \right| \times 100 \% = \left| \frac{-22}{110} \right| \times 100 \% = \frac{1}{5} \times 100 \% = 20 \%$$

El error relativo porcentual es del **20 %**.