

Métodos Numéricos
Examen Final
Pregrado
2025-1

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna. Solo el contenido de este cuadernillo será calificado.

Apellidos y Nombres:

Duración 100 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [**2 ptos**] A partir de los puntos $(1, 12)$, $(2, 5)$ y $(4, 18)$, se desea construir el spline cúbico natural que interpola dichos datos. El polinomio correspondiente al intervalo $[1, 2]$ es $S(x) = 2.25(x - 1)^3 - 9.25(x - 1) + 12$, mientras que para el intervalo $[2, 4]$, el spline queda definido como $S(x) = -1.125(x - 2)^3 + 6.75(x - 2)^2 - 2.5(x - 2) + 5$.

Solución:

Para determinar si los polinomios dados corresponden al spline cúbico natural que interpola los puntos $(1, 12)$, $(2, 5)$ y $(4, 18)$, analizamos las condiciones que debe cumplir un spline cúbico natural:

- a) **Interpola los puntos:** Los polinomios deben pasar exactamente por los puntos dados.

$$S_0(x) = 2.25(x - 1)^3 - 9.25(x - 1) + 12 \quad \text{en } [1, 2]$$

$$S_1(x) = -1.125(x - 2)^3 + 6.75(x - 2)^2 - 2.5(x - 2) + 5 \quad \text{en } [2, 4]$$

Verificamos:

- $S_0(1) = 12$ $S_0(2) = 5$
- $S_1(2) = 5$ $S_1(4) = 18$

- b) **Continuidad de la función y derivadas en $x = 2$:**

- $S_0(2) = S_1(2) = 5$ (la función es continua)
- $S'_0(x) = 6.75(x - 1)^2 - 9.25$
 $S'_0(2) = 6.75(1)^2 - 9.25 = -2.5$
 $S'_1(x) = -3.375(x - 2)^2 + 13.5(x - 2) - 2.5$
 $S'_1(2) = -2.5$
(la primera derivada es continua)

- $S_0''(x) = 13.5(x - 1)$
 $S_0''(2) = 13.5$
 $S_1''(x) = -6.75(x - 2) + 13.5$
 $S_1''(2) = 13.5$
 (la segunda derivada es continua)

c) **Condición natural:** La segunda derivada en los extremos debe ser cero:

- $S_0''(1) = 13.5(0) = 0$
- $S_1''(4) = -6.75 \times 2 + 13.5 = -13.5 + 13.5 = 0$

Conclusión: Los polinomios cumplen todas las condiciones del spline cúbico natural para los puntos dados. **Respuesta:** La afirmación es **VERDADERA**.

2. [2 ptos] Dada la integral definida:

$$I = \int_1^3 [(x + 2)^2 + e^x] dx,$$

el valor más pequeño de n (número de subintervalos) necesario para aproximar I con la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ compuesta, garantizando un error absoluto menor o igual que 10^{-1} , es $n = 6$.

Solución:

El error al aproximar I con la regla de Simpson $\frac{1}{3}$ se obtiene al acotar

$$E(x) = -\frac{(3-1)^5}{180n^4} f^{(4)}(x), \quad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

donde n es el número de subintervalos y $f(x) = (x + 2)^2 + e^x$.
 Se tiene $f^{(4)}(x) = e^x$, entonces

$$|E(x)| = \left| \frac{32}{180n^4} e^x \right| \leq \frac{8}{45n^4} e^3, \quad \forall x \in \langle 1, 3 \rangle$$

Si se quiere que el error sea menor o igual que 10^{-1} , entonces

$$\begin{aligned} \frac{8e^3}{45n^4} &\leq 10^{-1} \\ \frac{80e^3}{45n^4} &\leq n^4 \\ \sqrt[4]{35.7076} &\leq n \\ 2.4445 &\leq n \end{aligned}$$

Conclusión: $n = 6$ no es el valor más pequeño de n para obtener un error absoluto menor o igual que 10^{-1} , ya que con $n = 4$ también se puede.

Respuesta: La afirmación es **FALSA**.

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] Luego de resolver el siguiente PVI

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = e^t - x & ; \quad t \in [1, 4] \\ x(1) = 0 \end{cases}$$

utilizando el método de Runge Kutta de orden 2 y tamaño de paso $h = 1$. Halle el error relativo al calcular $x(4)$, sabiendo que la solución exacta es la función $x(t) = \frac{e^t - e^{2-t}}{2}$

Solución:

Considerando $f(t, x) = e^t - x$, $t_0 = 1$ y $x_0 = 0$, se aplica el método de Runge Kutta de orden 2 con tamaño de paso $h = 1$.

En la iteración i , se obtiene:

$$k_2 = f(t_i + 1, x_i + 1 \times k_1) = e^{t_i+1} - x_i - k_1$$

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) = x_i + \frac{1}{2}(e^{t_i+1} - x_i) = \frac{1}{2}(x_i + e^{t_i+1}) = \frac{1}{2}(x_i + e^{t_{i+1}})$$

Así,

- $x_0 = 0$.
- $x_1 = \frac{1}{2}(0 + e^1) = \frac{e^2}{2}$.
- $x_2 = \frac{1}{2}(\frac{e}{2} + e^2) = \frac{e^2}{4} + \frac{e^3}{2}$.
- $x_3 = \frac{1}{2}(\frac{e}{4} + \frac{e^2}{2} + e^3) = \frac{e^2}{8} + \frac{e^3}{4} + \frac{e^4}{2} = 33.2441$.

De la solución exacta se obtiene que $x(4) = 27.2314$. Por lo tanto, el error relativo es

$$\delta = \frac{|27.2314 - 33.2441|}{|27.2314|} = 0.2208$$

4. [3 ptos] Un equipo de ingenieros ambientales estudia la reducción de la concentración de un contaminante en un río (en mg/L) a medida que aumenta la distancia (en km) desde una fuente de contaminación industrial. Se sospecha que la relación sigue un modelo potencial inverso debido a procesos naturales de dilución y sedimentación. Se logran recolectar los siguientes datos:

distancia (x)	1.0	2.0	3.0	4.0
concentración (y)	5.0	3.0	2.33	2.0

Se desea ajustar un modelo del tipo $y = \frac{A}{x} + B$

- a) Formule las ecuaciones normales y luego halle los coeficientes desconocidos del modelo

Solución:

El sistema sobredeterminado es:

$$\begin{aligned} A + B &= 5 \\ 0.5A + B &= 3 \\ 0.3333A + B &= 2.33 \\ 0.25A + B &= 2 \end{aligned}$$

Luego, las ecuaciones normales son:

$$\begin{bmatrix} 1.4236 & 2.0833 \\ 2.0833 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.7766 \\ 12.33 \end{bmatrix}$$

Luego, $A = 4.0018$ y $B = 0.9983$.

- b) Calcule el coeficiente de determinación del ajuste y comente sobre la bondad del ajuste

Solución:

El modelo queda expresado como $y = \frac{4.0018}{x} + 0.9983$, entonces

$$S_r = (5 - 5.0001)^2 + (3 - 2.9992)^2 + (2.33 - 2.3322)^2 + (2 - 1.9988)^2 = 6.93 \times 10^{-6}$$

$$S_t = (5 - 3.0825)^2 + (3 - 3.0825)^2 + (2.33 - 3.0825)^2 + (2 - 3.0825)^2 = 5.4217$$

$$r^2 = 1 - \frac{S_r}{S_t} \approx 1$$

Como $r^2 \approx 1$, entonces la bondad del ajuste es buena.

APLICACIONES

5. [10 pts] En un flujo laminar, incompresible y totalmente desarrollado de un fluido viscoso entre dos placas planas paralelas separadas una distancia $2d$, el perfil de velocidad $u(y)$ está gobernado por la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\mu} \frac{dP}{dx}$$

$\mu = 2 \times 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$
 $\frac{dP}{dx} = -0.1 \frac{\text{Pa}}{\text{m}}$

condición de frontera: $u(d) = 0$

condición de frontera: $u(-d) = 0$

donde:

- μ es la viscosidad dinámica del fluido (Pa·s).
- $\frac{dP}{dx}$ es el gradiente de presión **constante** aplicado a lo largo del eje x (Pa/m).
- d es la mitad de la altura entre las dos placas paralelas.
- $y \in [-d, d]$ es la coordenada transversal perpendicular al flujo (variable independiente).
- u es la velocidad del fluido (variable dependiente) en la dirección x , en el punto y .

- a) [3 pts] Plantee los 2 problemas de valor inicial que se requieren para aplicar el **método del disparo** usando los valores de viscosidad y gradiente de presión. Luego, para cada PVI, plantee su correspondiente sistema de ecuaciones diferenciales.

Solución:

La ecuación diferencial está dada por:

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -5000$$

con $u(0.025) = u(-0.025) = 0$

PVI 1

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dy^2} = -5000 \\ u(-0.025) = 0, \quad u'(-0.025) = 0 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $v_1 = u$ y $v_2 = u'$, se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} v_1' = v_2 \\ v_2' = -5000 \end{cases}, \quad \begin{cases} v_1(-0.025) = 0 \\ v_2(-0.025) = 0 \end{cases}$$

PVI 2

$$\begin{cases} \frac{d^2 u}{dy^2} = 0 \\ u(-0.025) = 0, \quad u'(-0.025) = 1 \end{cases}$$

Haciendo el cambio de variable $v_1 = u$ y $v_2 = u'$, se plantea el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{cases} v_1' = v_2 & , v_1(-0.025) = 0 \\ v_2' = 0 & , v_2(-0.025) = 1 \end{cases}$$

- b) [3 ptos] Aproxime la solución del **primer** problema de valor inicial utilizando el **método de Euler** considerando un paso $h = d = 0.025$ m. Complete la tabla siguiente con los resultados obtenidos.

y	u_1
-0.025	
0	
0.025	

Solución:

Considerando $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $f(y, V) = \begin{bmatrix} v_2 \\ -5000 \end{bmatrix}$, se aplica el método de Euler con $h = 0.025$ y se obtiene

- **Iteración $i = 0$:**

$$y_0 = -0.025, V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -5000 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = V_0 + 0.025 \times k_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -125 \end{bmatrix}$$

- **Iteración $i = 1$:**

$$y_1 = 0, V_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -125 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} -125 \\ -5000 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = V_1 + 0.025 \times k_1 = \begin{bmatrix} -3.125 \\ -250 \end{bmatrix}$$

Completando en la tabla

y	u_1
-0.025	0
0	0
0.025	-3.125

- c) [2 ptos] Aproxime la solución del **segundo** problema de valor inicial utilizando el **método de Euler** considerando un paso $h = d = 0.025$ m. Complete la tabla siguiente con los resultados obtenidos.

y	u_2
-0.025	
0	
0.025	

Solución:

Considerando $V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$ y $f(y, V) = \begin{bmatrix} v_2 \\ 0 \end{bmatrix}$, se aplica el método de Euler con $h = 0.025$ y se obtiene

- **Iteración $i = 0$:**

$$y_0 = -0.025, V_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_1 = V_0 + 0.025 \times k_1 = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 1 \end{bmatrix}$$

- **Iteración $i = 1$:**

$$y_1 = 0, V_1 = \begin{bmatrix} 0.025 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$k_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$V_2 = V_1 + 0.025 \times k_1 = \begin{bmatrix} 0.05 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Completando en la tabla

y	u_2
-0.025	0
0	0.025
0.025	0.05

- d) [2 ptos] Aplique el **método del disparo** utilizando los resultados previos. Luego complete la tabla siguiente.

y	u_{aprox}
-0.025	
0	
0.025	

Finalmente, dada la solución exacta para la velocidad máxima $\mathbf{u(0) = 1.5625\ m/s}$, calcule el **error relativo porcentual** al aproximar este valor mediante el método del disparo.

Solución:

La solución aproximada por el método del disparo viene dada por la expresión

$$u(y) = u_1(y) + \frac{0 - u_1(0.025)}{u_2(0.025)}u_2(y) = u_1(y) + 62.5u_2(y).$$

Completando en la tabla

y	u_{aprox}
-0.025	0
0	1.5625
0.025	0

Por lo tanto, el error relativo porcentual para aproximar $u(0)$ es 0 %.