

Instrucciones: Se permite el uso de calculadora, trabaje con 4 decimales. En caso de no colocar su nombre, tendrá calificación cero sin lugar a reclamo, use únicamente los espacios provistos y no desglose hoja alguna. Solo el contenido de este cuadernillo será calificado.

Apellidos y Nombres:

Duración 110 minutos

CONCEPTUALIZACIÓN

Determine la veracidad de las siguientes proposiciones, indicando si son **Verdaderas** (V) o **Falsas** (F). En cada caso, justifique claramente su respuesta.

1. [2 ptos] Dada la ecuación diferencial ordinaria con condiciones de frontera:

$$4x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 8x \frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y(2) = 3,$$

la aproximación de $y(1.5)$ usando diferencias finitas centradas con $h = 0.5$ es $\frac{192}{71} \approx 2.7042$.

Respuesta: VERDADERO

La proposición es correcta. La aproximación de $y(1.5)$ mediante diferencias finitas centradas con $h = 0.5$ resulta efectivamente en $\frac{192}{71}$. A continuación, se detalla el procedimiento clave.

1. Discretización y Planteamiento de la Ecuación

El dominio $[1, 2]$ con $h = 0.5$ genera los nodos:

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 2$$

Con valores en la frontera $y_0 = y(1) = 2$ y $y_2 = y(2) = 3$. Se busca el valor del nodo interior $y_1 \approx y(1.5)$.

La EDO $4x^2 y'' + 8xy' + y = 0$ se aproxima en el nodo x_1 usando diferencias centradas:

$$4x_1^2 \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2} + 8x_1 \frac{y_2 - y_0}{2h} + y_1 = 0$$

2. Sustitución y Resolución Numérica

Sustituimos los valores conocidos ($x_1 = 1.5, h = 0.5, y_0 = 2, y_2 = 3$):

$$4(1.5)^2 \left(\frac{3 - 2y_1 + 2}{0.5^2} \right) + 8(1.5) \left(\frac{3 - 2}{2 \cdot 0.5} \right) + y_1 = 0$$

Simplificando la ecuación:

$$\begin{aligned} 4(2.25) \left(\frac{5 - 2y_1}{0.25} \right) + 12 \left(\frac{1}{1} \right) + y_1 &= 0 \\ 9 \cdot (4) \cdot (5 - 2y_1) + 12 + y_1 &= 0 \\ 36(5 - 2y_1) + 12 + y_1 &= 0 \\ 180 - 72y_1 + 12 + y_1 &= 0 \\ 192 - 71y_1 &= 0 \end{aligned}$$

Despejando y_1 :

$$y_1 = \frac{192}{71}$$

3. Conclusión

El valor calculado $y_1 = \frac{192}{71} \approx 2.7042$ coincide con el valor expuesto en la proposición. Por lo tanto, la afirmación es **verdadera**.

2. [2 ptos] Sea la función $f(x) = 10x^2 - 8x + 2$ definida en el intervalo $[-10; 10]$ y en la cual se necesita calcular el valor de $I = \int_{-10}^{10} f(x)dx$. Al aplicar el método de Simpson 1/3 compuesto con $n = 6$ subintervalos de partición, entonces el error cometido es mínimo pero estrictamente positivo.

Respuesta: FALSO

La justificación se basa directamente en la fórmula teórica del error para el método de Simpson 1/3.

1. Análisis del Error Teórico

El error de la regla de Simpson 1/3 compuesta está dado por la fórmula:

$$E = -\frac{(b-a)h^4}{180}f^{(4)}(\xi), \quad \text{para algún } \xi \in (a, b)$$

La clave es evaluar la cuarta derivada de la función $f(x) = 10x^2 - 8x + 2$.

Calculamos las derivadas sucesivas:

$$\begin{aligned}f(x) &= 10x^2 - 8x + 2 \\f'(x) &= 20x - 8 \\f''(x) &= 20 \\f'''(x) &= 0 \\f^{(4)}(x) &= 0\end{aligned}$$

Dado que la cuarta derivada es idénticamente cero para cualquier valor de x , se tiene que $f^{(4)}(\xi) = 0$.

2. Conclusión

Sustituyendo $f^{(4)}(\xi) = 0$ en la fórmula del error:

$$E = -\frac{(b-a)h^4}{180} \times 0 = 0$$

El error teórico es **exactamente cero**. Esto contradice la afirmación de que el error es “estrictamente positivo”. Por lo tanto, la proposición es **falsa**.

PROCEDIMENTAL

3. [3 ptos] Se cuenta con tres puntos que representan la relación entre dos parámetros x e y : $(1, 2)$, $(3, 3)$ y $(5, 1)$. El objetivo construir el **spline cúbico natural** que interpole estos datos. Construya dicho spline S y luego calcule $S(2)$ y $S'(4)$.

Observación: Debe mostrar todo el procedimiento junto con sus cálculos.

Solución del Problema de Spline Cúbico Natural

1. Datos Iniciales y Parámetros del Problema

Los puntos a interpolar son $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, 3)$ y $(x_2, y_2) = (5, 1)$.

Por ser un **spline cúbico natural**, las segundas derivadas en los extremos son nulas:

$$M_0 = 0 \quad \text{y} \quad M_2 = 0$$

Los anchos de los subintervalos (h_i) son:

$$h_0 = x_1 - x_0 = 3 - 1 = 2$$

$$h_1 = x_2 - x_1 = 5 - 3 = 2$$

2. Cálculo de los M_i (M_1)

Calculamos las diferencias divididas necesarias (pendientes):

$$y[x_0, x_1] = \frac{3 - 2}{3 - 1} = \frac{1}{2}, \quad y[x_1, x_2] = \frac{1 - 3}{5 - 3} = -1$$

El sistema $\mathbf{AM} = 6\mathbf{b}$ se reduce a una sola ecuación para M_1 :

$$2(h_0 + h_1)M_1 = 6(y[x_1, x_2] - y[x_0, x_1])$$

Sustituyendo valores:

$$2(2 + 2)M_1 = 6\left(-1 - \frac{1}{2}\right)$$
$$M_1 = -\frac{9}{8}$$

3. Cálculo de los Coeficientes y Construcción del Spline

Tramo 1: $S_0(x)$ para $x \in [1, 3]$

- $d_0 = y_0 = 2$
- $b_0 = M_0/2 = 0$
- $a_0 = \frac{M_1 - M_0}{6h_0} = \frac{-9/8}{12} = -\frac{3}{32}$
- $c_0 = y[x_0, x_1] - \frac{h_0(2M_0 + M_1)}{6} = \frac{1}{2} - \frac{2(-9/8)}{6} = \frac{7}{8}$

$$S_0(x) = -\frac{3}{32}(x-1)^3 + \frac{7}{8}(x-1) + 2$$

Tramo 2: $S_1(x)$ para $x \in [3, 5]$

- $d_1 = y_1 = 3$
- $b_1 = M_1/2 = -\frac{9}{16}$
- $a_1 = \frac{(M_2 - M_1)}{6h_1} = \frac{9/8}{12} = \frac{3}{32}$
- $c_1 = y[x_1, x_2] - \frac{h_1(2M_1 + M_2)}{6} = -1 - \frac{2(2(-9/8))}{6} = -\frac{1}{4}$

$$S_1(x) = \frac{3}{32}(x-3)^3 - \frac{9}{16}(x-3)^2 - \frac{1}{4}(x-3) + 3$$

4. Resultados Finales

Cálculo de S(2): (Se usa $S_0(x)$ pues $2 \in [1, 3]$)

$$S(2) = -\frac{3}{32}(1)^3 + \frac{7}{8}(1) + 2 = \frac{89}{32}$$

Cálculo de S'(4): (Se usa la derivada de $S_1(x)$ pues $4 \in [3, 5]$)

$$S'_1(x) = \frac{9}{32}(x-3)^2 - \frac{9}{8}(x-3) - \frac{1}{4}$$

$$S'(4) = \frac{9}{32}(1)^2 - \frac{9}{8}(1) - \frac{1}{4} = -\frac{35}{32}$$

Respuestas:

$$S(2) = \frac{89}{32} \approx 2.78125, \quad S'(4) = -\frac{35}{32} \approx -1.09375$$

4. [3 pts] En simulación de grandes escalas (LES), el campo de velocidad filtrado se obtiene aplicando un operador de filtrado espacial en el dominio físico. Para separar estructuras turbulentas grandes de las pequeñas, se evalúa numéricamente una integral que define la velocidad filtrada local. Dado un campo de velocidad unidimensional $u(x)$, el campo filtrado en el punto $x_0 = 0$ usando un filtro gaussiano se define como:

$$\overline{u}_0 = \int_{-0.2}^{0.2} u(x) \cdot G_{\Delta}(x) dx, \quad G_{\Delta}(x) = \frac{1}{\Delta\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{\Delta}\right)^2}, \quad u(x) = \cos(5x)$$

donde $u(x)$ es la componente de velocidad antes del filtrado, y $G_{\Delta}(x)$ es un núcleo gaussiano centrado en cero, con $\Delta = 0.2$ el ancho del filtro.

Con base en esta información, resuelva lo siguiente:

- a. [1 pts] Aproxime el valor de la integral utilizando la regla del trapecio para $n = 2$ en el intervalo $[-0.2, 0.2]$.

1. Definición del Problema y Parámetros

La integral a aproximar es $\overline{u}_0 = \int_{-0.2}^{0.2} f(x) dx$, donde el integrando es:

$$f(x) = u(x) \cdot G_{\Delta}(x) = \cos(5x) \cdot \frac{1}{0.2\sqrt{\pi}} e^{-\left(\frac{x}{0.2}\right)^2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos(5x) e^{-25x^2}$$

Los parámetros para la regla del trapecio son:

- Intervalo de integración: $[a, b] = [-0.2, 0.2]$
- Número de subintervalos: $n = 2$

El paso de integración h es: $h = \frac{b-a}{n} = \frac{0.2 - (-0.2)}{2} = 0.2$

Los puntos de evaluación son: $x_0 = a = -0.2$, $x_1 = a + h = 0$, y $x_2 = b = 0.2$.

2. Evaluación de la Función y Aplicación de la Fórmula

La fórmula de la regla del trapecio compuesta para $n = 2$ es:

$$\overline{u}_0 \approx \frac{h}{2} [f(x_0) + 2f(x_1) + f(x_2)]$$

Evaluamos la función $f(x)$ en los puntos requeridos:

- $f(x_0) = f(-0.2)$:

$$f(-0.2) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos(5 \cdot (-0.2)) e^{-25(-0.2)^2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos(-1) e^{-1} = \frac{5 \cos(1)}{\sqrt{\pi} e} \approx 0.56043$$

- $f(x_1) = f(0)$:

$$f(0) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos(0)e^0 = \frac{5}{\sqrt{\pi}}(1)(1) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \approx 2.82095$$

- $f(x_2) = f(0.2)$:

$$f(0.2) = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos(5 \cdot 0.2)e^{-25(0.2)^2} = \frac{5}{\sqrt{\pi}} \cos(1)e^{-1} = \frac{5 \cos(1)}{\sqrt{\pi}e} \approx 0.56043$$

Sustituimos estos valores en la fórmula del trapecio:

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &\approx \frac{0.2}{2} [0.56043 + 2(2.82095) + 0.56043] \\ \bar{u}_0 &\approx 0.676276 \end{aligned}$$

3. Resultado de la Aproximación

Respuesta:

El valor aproximado de $\bar{u}_0$ usando la regla del trapecio con $n = 2$ es:

$$\bar{u}_0 \approx 0.6763$$

- b. [2 pts] Aproxime el valor de $\bar{u}_0$ utilizando el algoritmo de Romberg con $k = 3$ (error $\mathcal{O}(h^6)$). Para ello, use los valores (notación de Romberg): $I(1, 1) = 0.2243$, $I(3, 1) = 0.7238$, presente el cuadro, la respuesta final del valor aproximado de $\bar{u}_0$ y su error relativo porcentual si $\bar{u}_0 = 0.7404$ (valor exacto).

1. Análisis y Construcción del Cuadro de Romberg

El objetivo es construir el cuadro hasta $k = 3$ (orden $\mathcal{O}(h^6)$). La primera columna ($k = 1$) contiene las aproximaciones de la regla del trapecio:

- $I(1, 1)$ (para $n = 1$): 0.2243 (Dato del problema)
- $I(2, 1)$ (para $n = 2$): 0.6763 (Resultado del apartado a)
- $I(3, 1)$ (para $n = 4$): 0.7238 (Dato del problema)

Se aplica la fórmula de Romberg para las siguientes columnas.

Cálculos para la 2da columna ($k = 2, \mathcal{O}(h^4)$):

$$\diamond I(1, 2) = \frac{4 \cdot I(2, 1) - I(1, 1)}{3} = \frac{4(0.6763) - 0.2243}{3} = 0.8270$$

$$\diamond I(2, 2) = \frac{4 \cdot I(3, 1) - I(2, 1)}{3} = \frac{4(0.7238) - 0.6763}{3} = 0.7396$$

Cálculo para la 3ra columna ($k = 3, \mathcal{O}(h^6)$):

$$\diamond I(1, 3) = \frac{16 \cdot I(2, 2) - I(1, 2)}{15} = \frac{16(0.7396) - 0.8270}{15} = 0.7338$$

La mejor aproximación es el valor superior de la última columna:

$$I(1, 3) \approx 0.7338.$$

2. Cálculo del Error Relativo Porcentual

El valor exacto es $V_{\text{exacto}} = 0.7404$. El valor aproximado es $V_{\text{aprox}} = 0.7338$.

La fórmula del error relativo porcentual es:

$$\varepsilon_r \% = \left| \frac{V_{\text{exacto}} - V_{\text{aprox}}}{V_{\text{exacto}}} \right| \times 100 \%$$

Sustituyendo los valores:

$$\varepsilon_r \% = \left| \frac{0.7404 - 0.7338}{0.7404} \right| \times 100 \%$$

$$\varepsilon_r \% \approx 0.8914 \%$$

3. Resultados Finales

Respuestas:

Cuadro de Romberg ($I(j, k)$):

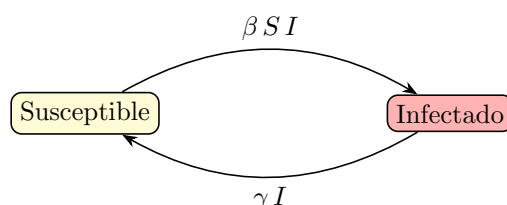
j	$k = 1 (\mathcal{O}(h^2))$	$k = 2 (\mathcal{O}(h^4))$	$k = 3 (\mathcal{O}(h^6))$
1	0.2243	0.8270	0.7338
2	0.6763	0.7396	
3	0.7238		

Valor aproximado de $\bar{u}_0 \approx 0.7338$

Error relativo porcentual: $\varepsilon_r \% \approx 0.8914 \%$

APLICACIONES

5. [10 ptos] Modelo SIS. En ciertas infecciones, como la gripe común o la influenza, la recuperación no confiere inmunidad duradera y los individuos recuperados vuelven a ser susceptibles. Esta dinámica puede esquematizarse así:



El modelo **SIS** con población total normalizada se describe por:

$$\frac{dS}{dt} = -\beta S I + \gamma I, \quad \frac{dI}{dt} = \beta S I - \gamma I, \quad S(t) + I(t) = 1 \text{ (normalización)}$$

- a) [2 ptos] Considere los parámetros y condiciones iniciales:

$$\beta = 0.5, \quad \gamma = 0.2; \quad S(0) = 0.90, \quad I(0) = 0.10.$$

Escriba explícitamente el sistema de ecuaciones diferenciales para $S(t)$ e $I(t)$ como un problema de valor inicial (PVI) en forma vectorial $\mathbf{y}' = \mathbf{F}(t, \mathbf{y})$, con $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix}$.

1. Sustitución de Parámetros en el Modelo

Se nos dan los siguientes parámetros: $\beta = 0.5$ y $\gamma = 0.2$

Sustituimos estos valores en las ecuaciones diferenciales del modelo SIS:

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= -0.5SI + 0.2I \\ \frac{dI}{dt} &= 0.5SI - 0.2I \end{aligned}$$

2. Definición de la Forma Vectorial

Definimos los vectores:

$$\mathbf{y}(t) = \begin{bmatrix} S(t) \\ I(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}'(t) = \begin{bmatrix} dS/dt \\ dI/dt \end{bmatrix}$$

La función vectorial:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} -0.5SI + 0.2I \\ 0.5SI - 0.2I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(-0.5S + 0.2) \\ -I(-0.5S + 0.2) \end{bmatrix}$$

Condición inicial:

$$\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} 0.90 \\ 0.10 \end{bmatrix}$$

3. PVI Explícito en Forma Vectorial

El problema de valor inicial es:

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} S \\ I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(-0.5S + 0.2) \\ -I(-0.5S + 0.2) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} S(0) \\ I(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.90 \\ 0.10 \end{bmatrix}$$

- b) [6 ptos] Aplique el método de Runge–Kutta de orden 2 (Heun) con paso $\Delta t = 4$ para aproximar $S(12)$, $I(12)$. Muestre todos los cálculos y redondee a 4 decimales. **Complete la tabla** siguiente con los resultados obtenidos.

t	S	I	k_{1S}	k_{1I}	k_{2S}	k_{2I}
0	0.90	0.10				
4						
8						
12			xxxxxx	xxxxxx	xxxxxx	xxxxxx

1. Funciones y Parámetros del Problema

Funciones del sistema:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) = \begin{bmatrix} F_S(S, I) \\ F_I(S, I) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(-0.5S + 0.2) \\ -I(-0.5S + 0.2) \end{bmatrix}$$

Condiciones iniciales y tamaño de paso:

$$t_0 = 0, \quad \mathbf{y}_0 = \begin{bmatrix} 0.90 \\ 0.10 \end{bmatrix}, \quad h = 4$$

Fórmula de RK2 (Heun):

$$\mathbf{y}_{i+1} = \mathbf{y}_i + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)$$

donde $\mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{y}_i)$, $\mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(t_i + h, \mathbf{y}_i + h\mathbf{k}_1)$

2. Iteración 1: $t = 0 \rightarrow 4$

Cálculo de $\mathbf{k}_1$ en $t_0 = 0$:

$$\begin{bmatrix} k_{1S} \\ k_{1I} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_0, \mathbf{y}_0) = \begin{bmatrix} 0.1(-0.5 \cdot 0.9 + 0.2) \\ -0.1(-0.5 \cdot 0.9 + 0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0250 \\ 0.0250 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{k}_2$ (predictor en $t_0 + h = 4$):

$$\mathbf{y}_0 + h\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0.90 \\ 0.10 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -0.0250 \\ 0.0250 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8000 \\ 0.2000 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{2S} \\ k_{2I} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(t_0 + h, \mathbf{y}_0 + h\mathbf{k}_1) = \begin{bmatrix} 0.2(-0.5 \cdot 0.8 + 0.2) \\ -0.2(-0.5 \cdot 0.8 + 0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0400 \\ 0.0400 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{y}_1$ (en $t_1 = 4$):

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}_0 + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 0.90 \\ 0.10 \end{bmatrix} + \frac{4}{2} \left(\begin{bmatrix} -0.0400 \\ 0.0400 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0400 \\ 0.0400 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.7700 \\ 0.2300 \end{bmatrix}$$

3. Iteración 2: $t = 4 \rightarrow 8$

Cálculo de $\mathbf{k}_1$ en $t_1 = 4$:

$$\begin{bmatrix} k_{1S} \\ k_{1I} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_1, \mathbf{y}_1) = \begin{bmatrix} 0.23(-0.5 \cdot 0.77 + 0.2) \\ -0.23(-0.5 \cdot 0.77 + 0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0426 \\ 0.0426 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{k}_2$ (predictor en $t_1 + h = 8$):

$$\mathbf{y}_1 + h\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0.7700 \\ 0.2300 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -0.0426 \\ 0.0426 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5996 \\ 0.4004 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{2S} \\ k_{2I} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(t_1 + h, \mathbf{y}_1 + h\mathbf{k}_1) = \begin{bmatrix} 0.4004(-0.5 \cdot 0.5996 + 0.2) \\ -0.4004(-0.5 \cdot 0.5996 + 0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0400 \\ 0.0400 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{y}_2$ (en $t_2 = 8$):

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 0.7700 \\ 0.2300 \end{bmatrix} + \frac{4}{2} \left(\begin{bmatrix} -0.0426 \\ 0.0426 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0400 \\ 0.0400 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.6048 \\ 0.3952 \end{bmatrix}$$

4. Iteración 3: $t = 8 \rightarrow 12$

Cálculo de $\mathbf{k}_1$ en $t_2 = 8$:

$$\begin{bmatrix} k_{1S} \\ k_{1I} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_1 = \mathbf{F}(t_2, \mathbf{y}_2) = \begin{bmatrix} 0.3952(-0.5 \cdot 0.6048 + 0.2) \\ -0.3952(-0.5 \cdot 0.6048 + 0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0405 \\ 0.0405 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{k}_2$ (predictor en $t_2 + h = 12$):

$$\mathbf{y}_2 + h\mathbf{k}_1 = \begin{bmatrix} 0.6048 \\ 0.3952 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} -0.0405 \\ 0.0405 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.4428 \\ 0.5572 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} k_{2S} \\ k_{2I} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_2 = \mathbf{F}(t_2 + h, \mathbf{y}_2 + h\mathbf{k}_1) = \begin{bmatrix} 0.5572(-0.5 \cdot 0.4428 + 0.2) \\ -0.5572(-0.5 \cdot 0.4428 + 0.2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0119 \\ 0.0119 \end{bmatrix}$$

Cálculo de $\mathbf{y}_2$ (en $t_3 = 12$):

$$\mathbf{y}_2 = \mathbf{y}_1 + \frac{h}{2}(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2) = \begin{bmatrix} 0.6048 \\ 0.3952 \end{bmatrix} + \frac{4}{2} \left(\begin{bmatrix} -0.0405 \\ 0.0405 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.0119 \\ 0.0119 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0.5000 \\ 0.5000 \end{bmatrix}$$

5. Tabla de Resultados y Respuesta Final

t	S	I	k_{1S}	k_{1I}	k_{2S}	k_{2I}
0	0.9000	0.1000	-0.0250	0.0250	-0.0400	0.0400
4	0.7700	0.2300	-0.0426	0.0426	-0.0400	0.0400
8	0.6048	0.3952	-0.0405	0.0405	-0.0119	0.0119
12	0.5000	0.5000	—	—	—	—

Respuestas:

La aproximación en $t = 12$ es:

$$S(12) \approx 0.5000$$

$$I(12) \approx 0.5000$$

c) [2 ptos] Finalmente, dado que las poblaciones exactas al tiempo $t = 12$ son

$$S(12) = 0.4721, \quad I(12) = 0.5279$$

Calcule los errores relativos de las aproximaciones del ítem previo.

1. Fórmula y Valores para el Cálculo El error relativo se calcula con:

$$\varepsilon_r = \left| \frac{\text{Valor Exacto} - \text{Valor Aproximado}}{\text{Valor Exacto}} \right|$$

Valores para $t = 12$:

- **Valores Exactos:** $S_{\text{exacto}} = 0.4721$, $I_{\text{exacto}} = 0.5279$
- **Valores Aproximados:** $S_{\text{aprox}} = 0.5000$, $I_{\text{aprox}} = 0.5000$

2. Error Relativo para S(12)

Cálculo para la población de susceptibles:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r,S} &= \left| \frac{0.4721 - 0.5000}{0.4721} \right| \\ &= 0.0591\end{aligned}$$

3. Error Relativo para I(12) Cálculo para la población de infectados:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{r,I} &= \left| \frac{0.5279 - 0.5000}{0.5279} \right| \\ &= 0.0529\end{aligned}$$

4. Resultados y Respuesta Final

Respuesta Final:

Los errores relativos en $t = 12$ son:

$$\varepsilon_{r,S} \approx \mathbf{0.0591}$$

$$\varepsilon_{r,I} \approx \mathbf{0.0529}$$