

Duración: 90 minutos

Fecha: 26 de junio de 2026

-
- El examen consta de 4 problemas, cada uno con un valor de 5 puntos, sumando un total de 20 puntos.
 - Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
 - Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección, el número de la pregunta y el código ID de la pregunta. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
 - Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en la tarea de Examen Laboratorio 06 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
 - Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
 - El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
 - El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
 - Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
 - No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
 - Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

Pregunta 1: Gradiente de Presión en una Microtobera de Plasma

En un prototipo de microtobera para propulsión de plasma, se mide la presión estática $p = p(x)$ a lo largo del eje central de la tobera. La variación espacial de la presión permite estimar el gradiente impulsor axial que acelera el plasma, definido por

$$G_x(x) = -\frac{dp}{dx}. \quad (1)$$

A partir de mediciones experimentales, se obtuvo la siguiente data:

x (cm)	0	12	26	43	62	83	105
p (kPa)	95.0	89.0	76.0	50.0	35.0	28.0	24.0

- a) Defina un **spline cúbico natural** usando la data de presión estática y reporte los coeficientes de los polinomios cúbicos en la variable **CoefP**, considerando que cada tramo del spline está dado por

$$p_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i.$$

Almacene los coeficientes en la matriz

$$\mathbf{CoefP} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{bmatrix},$$

donde cada fila corresponde a un intervalo del spline.

- b) Determine el **gradiente impulsor axial** $G_x(x)$ en los puntos $x = 30$ cm y $x = 72$ cm. Utilice una representación simbólica de los tramos correspondientes del spline para calcular dichos valores a partir de la ecuación (1) y almacene los resultados numéricos en el vector fila

$$\mathbf{Gval} = [G_{30} \quad G_{72}].$$

- c) Determine el **punto de mayor aceleración del plasma** entre $x = 25$ cm y $x = 75$ cm. Para ello, usando 500 puntos uniformemente distribuidos y calcule el gradiente impulsor axial $G_x = G_x(x)$ usando el spline cúbico natural. Determine el punto de esta discretización donde la magnitud $|G_x(x)|$ alcanza su valor máximo. Almacene el resultado en el vector fila

$$\mathbf{Gmaxinfo} = [x_{\text{máx}} \quad |G_x(x_{\text{máx}})|].$$

En caso existan varios puntos con el mismo valor máximo, considere el primero de ellos.

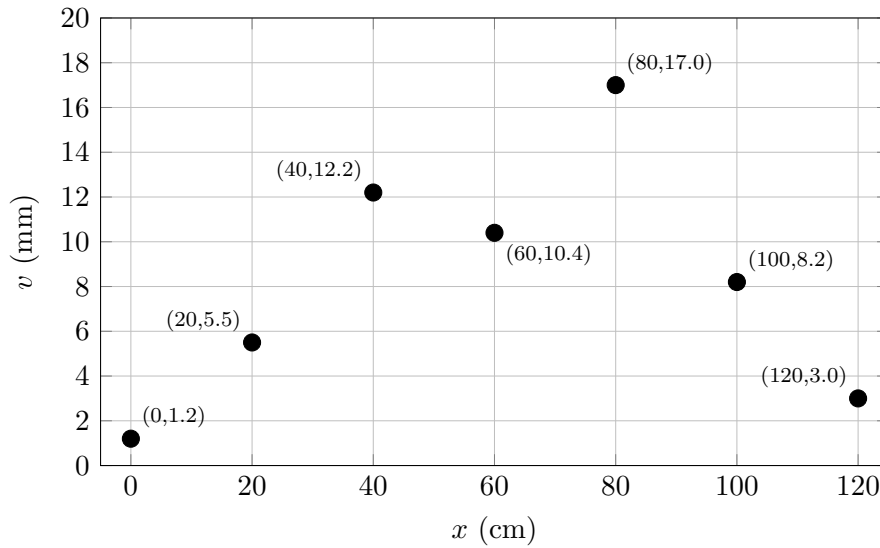
- d) Evalúe si, en algún punto de cada intervalo del spline, la magnitud del gradiente impulsor axial supera (es mayor que) el valor de 1.20 kPa/cm. Para ello, evalúe 200 puntos uniformes por interval (incluidos sus extremos), calcule $|G_x(x)|$ en dichos puntos y determine si algún punto supera dicho valor. Finalmente, almacene la cantidad de intervalos que excedieron ese gradiente en la variable **nzonas**.

Pregunta 2: Deflexión de una Viga Flexible

En un laboratorio de mecánica de sólidos se analiza la deformación vertical de una viga flexible sometida a una carga distribuida. Para obtener una aproximación global del perfil deformado, se propone ajustar la deflexión vertical v mediante un modelo cuadrático en función de la posición horizontal x :

$$v(x) = ax^2 + bx + c, \quad (2)$$

donde x se mide en cm y v en mm. La siguiente gráfica muestra las mediciones experimentales de la deflexión de la viga para distintas posiciones horizontales. Los puntos experimentales se encuentran marcados y etiquetados con sus coordenadas (x, v) .



- a) Plantee el ajuste por mínimos cuadrados para el modelo (2) y reporte la matriz del sistema de ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 v_i \\ \sum x_i v_i \\ \sum v_i \end{bmatrix}.$$

Almacene la matriz del sistema de ecuaciones normales en la variable **Mflex**.

- b) Determine los coeficientes del modelo cuadrático ajustado. Reporte los coeficientes en el vector fila **coefFlex** = $[a \ b \ c]$.
- c) Utilizando el modelo ajustado (2), determine el punto de mayor deflexión de la viga entre $x = 0$ cm y $x = 120$ cm. Para ello, genere 320 puntos uniformemente distribuidos en dicho intervalo y determine el punto de esta discretización donde $v(x)$ alcanza su valor máximo. Almacene estos resultados en el vector fila **infoFlex** = $[x_{\text{máx}} \ v(x_{\text{máx}})]$.

En caso existan varios puntos con el mismo valor máximo, considere el primero de ellos.

- d) Calcule la suma total de cuadrados S_t , la suma de cuadrados de los residuos S_r y el coeficiente de determinación R^2 , definidos por

$$S_t = \sum_{i=1}^n (v_i - \bar{v})^2, \quad S_r = \sum_{i=1}^n (v_i - v(x_i))^2, \quad R^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}.$$

Almacene los resultados en el vector fila **calidadFlex** = $[S_t \ S_r \ R^2]$.

Pregunta 3 - Carga Transferida en una Descarga Capacitiva Amortiguada

En un experimento de electrónica aplicada, se analiza la descarga de un sistema capacitivo acoplado a un circuito de control. Debido a la presencia de elementos inductivos y resistivos, la corriente instantánea transferida al sistema se modela mediante

$$i(t) = 6e^{-0.40t} (1 + 0.30 \cos(2.5t)) + 0.25te^{-0.20t}, \quad (3)$$

donde $i(t)$ se mide en mA y t en segundos. La carga total transferida durante los primeros 6 segundos está dada por

$$Q = \int_0^6 i(t) dt.$$

- a) Calcule la integral Q usando el método del **trapezio compuesto** con $n = 48$ subintervalos y el método de **Simpson 1/3 compuesto** con $n = 48$ subintervalos. Almacene los resultados en el vector fila

$$\mathbf{Q_comp} = [Q_{\text{Trap}} \quad Q_{\text{Simpson}}].$$

- b) Construya una tabla de Romberg de 6 niveles. Use como primera columna las aproximaciones del trapezio compuesto con 1, 2, 4, 8, 16 y 32 subintervalos, respectivamente. Usando la extrapolación

$$R_{j,k} = \frac{4^{k-1}R_{j+1,k-1} - R_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}.$$

Almacene la tabla triangular en la variable **T_rombergQ**, dejando ceros en las entradas no utilizadas.

- c) Calcule el valor **exacto** de la integral utilizando la herramienta simbólica de MATLAB y almacénelo en la variable **Q_exact** numérico tipo double. Luego, calcule el error relativo porcentual del trapezio compuesto con $n = 48$, de Simpson 1/3 compuesto con $n = 48$, y de la aproximación de Romberg $R_{1,6}$, respecto a **Q_exact**:

$$E_{\%} = \left| \frac{Q_{\text{aprox}} - \mathbf{Q_exact}}{\mathbf{Q_exact}} \right| \times 100.$$

Almacene los errores en el vector fila **Err_Q** = $[E_{\text{Trap}} \quad E_{\text{Simpson}} \quad E_{\text{Romberg}}]$.

- d) Determine el menor número par de subintervalos $n_{\text{mín}}$ para el método de Simpson 1/3 compuesto, comenzando desde $n = 2$ e incrementando de dos en dos, tal que

$$|Q_{\text{Simpson}}(n) - R_{1,6}| \leq 10^{-4}.$$

Almacene el resultado en el vector fila **SimpsonQ** = $[n_{\text{mín}} \quad Q_{\text{Simpson}}(n_{\text{mín}})]$.

- e) Considere ahora la siguiente discretización no uniforme del intervalo $[0, 6]$:

$$\mathbf{tvar} = [0 \quad 0.50 \quad 0.93 \quad 1.36 \quad 1.71 \quad 2.21 \quad 2.46 \quad 2.83 \quad 3.33 \quad 3.62 \quad 3.93 \quad 4.47 \quad 5.16 \quad 6.00].$$

Aplique el método del trapezio con paso variable sobre dicha discretización. Además, calcule el trapezio compuesto uniforme usando el mismo número de subintervalos, es decir, $n = 13$. Almacene las aproximaciones y sus errores relativos porcentuales respecto a **Q_exact** en el vector fila **TrapQ** = $[Q_{\text{Trap,unif}} \quad Q_{\text{Trap,var}} \quad E_{\text{Trap,unif}} \quad E_{\text{Trap,var}}]$.

Obs: Si considera necesario, elabore una función **Tvarcomp(f,x)**, para aplicar el método de trapezio con paso variable.

Pregunta 4 - Oxígeno Disuelto en un Microbiorreactor con Aireación Pulsada

En un laboratorio de bioinstrumentación se estudia la evolución de la concentración de oxígeno disuelto en un biorreactor utilizado para cultivo celular. El sistema recibe una aireación pulsada inicial que se atenúa gradualmente, mientras que la concentración tiende a un valor de saturación impuesto por el medio.

La concentración de oxígeno disuelto $C = C(t)$, medida en mg/L, se modela mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dC}{dt} = -0.28(C - 8.0) + 0.9e^{-0.25t} \sin(1.1t), \quad C(0) = 5.5. \quad (4)$$

donde t se mide en minutos. Se desea aproximar la evolución de la concentración de oxígeno en el intervalo $0 \leq t \leq 12$, usando un paso

$$h = 0.1.$$

- Calcule la solución numérica usando el método de **Euler** desde $t = 0$ hasta $t = 12$. Almacene el vector columna de concentraciones en la variable **C_euler**.
- Calcule la solución numérica usando el método de **Runge-Kutta de segundo orden tipo Heun** desde $t = 0$ hasta $t = 12$, con el mismo paso h . Almacene el vector columna de concentraciones en la variable **C_rk2**.
- Calcule la solución numérica utilizando la función **ode45** con el vector temporal $0 : h : 12$. Almacene el vector columna de concentraciones obtenido con **ode45** en la variable **C_ode45**.
- Compare los métodos de Euler y RK2-Heun respecto a la solución obtenida con **ode45** en los tiempos $t = 3$, $t = 7$ y $t = 12$. Para ello, calcule los errores absolutos

$$E_{\text{Euler}}(t_i) = |C_{\text{Euler}}(t_i) - C_{\text{ode45}}(t_i)|, \quad E_{\text{RK2}}(t_i) = |C_{\text{RK2}}(t_i) - C_{\text{ode45}}(t_i)|.$$

Almacene los resultados en la matriz

$$\mathbf{Err_C} = \begin{bmatrix} E_{\text{Euler}}(3) & E_{\text{RK2}}(3) \\ E_{\text{Euler}}(7) & E_{\text{RK2}}(7) \\ E_{\text{Euler}}(12) & E_{\text{RK2}}(12) \end{bmatrix}.$$