

**Duración:** 90 minutos

**Fecha:** 25 de junio de 2026

- 
- El examen consta de 4 problemas, cada uno con un valor de 5 puntos, sumando un total de 20 puntos.
  - Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
  - Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección, el número de la pregunta y el código ID de la pregunta. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
  - Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en la tarea de Examen Laboratorio 06 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
  - Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
  - El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
  - El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
  - Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
  - No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
  - Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

## Spline Cúbico Natural – Temperatura en una Barra Metálica

Una barra metálica sometida a calentamiento no uniforme presenta variaciones de temperatura a lo largo de su longitud. Se registraron mediciones experimentales en ciertos puntos de la barra:

|          |      |      |      |      |      |      |
|----------|------|------|------|------|------|------|
| $x$ (cm) | 0    | 20   | 45   | 70   | 100  | 130  |
| $T$ (°C) | 25.0 | 38.5 | 52.0 | 47.5 | 60.0 | 55.0 |

- a) Defina un **spline cúbico natural** usando la data de temperatura de la barra y reporte los coeficientes de los polinomios cúbicos en la variable **Coef**, considerando que cada tramo del spline está dado por

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i.$$

Almacene los coeficientes en la matriz

$$\mathbf{Coef} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{bmatrix},$$

donde cada fila corresponde a un intervalo del spline.

- b) Determine el **gradiente de temperatura** en los puntos  $x = 30$  cm y  $x = 90$  cm. Utilice una representación simbólica de los tramos correspondientes del spline para calcular dichos gradientes y almacene los resultados numéricos en el vector fila

$$\mathbf{gval} = [g30 \quad g90]$$

- c) Estime el gradiente promedio de temperatura usando 10 puntos uniformemente distribuidos entre  $x = 50$  cm y  $x = 90$  cm, incluyendo ambos extremos. Para cada punto, utilice el spline cúbico natural para calcular el gradiente de temperatura y almacene el promedio de dichos valores en la variable **gprom**.
- d) Evalúe si, en algún punto de cada intervalo, la magnitud del gradiente de temperatura supera el valor de 0.40. Para ello, genere 200 puntos en cada intervalo, incluidos sus extremos, y determine si algún punto supera dicho valor. Finalmente, almacene la cantidad de intervalos que excedieron ese gradiente en la variable **ninterv**.

## Pregunta 2: Calibración de un Termistor NTC (Ajuste por Linealización)

En un laboratorio de instrumentación se estudia el comportamiento de un termistor NTC cuya resistencia eléctrica  $R$  (en  $\Omega$ ) depende de la temperatura absoluta  $T$  (en K). Para ciertos rangos de operación, esta relación puede modelarse mediante la expresión exponencial:

$$R(T) = \alpha e^{\beta T},$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son constantes que dependen de las características del sensor.

Se realizaron mediciones experimentales y se obtuvieron los siguientes datos:

| $T$ (K)          | 280  | 290  | 300  | 310  | 320  | 330  |
|------------------|------|------|------|------|------|------|
| $R$ ( $\Omega$ ) | 1500 | 1830 | 2230 | 2720 | 3320 | 4050 |

Se desea obtener un modelo matemático que permita estimar la resistencia del sensor y analizar su sensibilidad frente a cambios de temperatura.

**En un script, realice lo siguiente:**

- a) Considere la siguiente linealización del modelo exponencial  $R(T) = \alpha e^{\beta T}$  mediante el cambio de variable  $Y = \ln(R)$ , obteniéndose el modelo linealizado

$$Y = a + bT,$$

donde  $a = \ln(\alpha)$ ,  $b = \beta$ . Plantee el ajuste por mínimos cuadrados para el modelo linealizado y reporte la matriz del sistema de ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n T_i Y_i \end{bmatrix}$$

en la variable **A**.

- b) Determine los coeficientes del modelo linealizado y obtenga los parámetros originales  $\alpha$  y  $\beta$ . Reporte los parámetros en el vector fila **coef** =  $[\alpha \ \beta]$ .
- c) Defina la sensibilidad del sensor como

$$S(T) = \frac{dR}{dT}.$$

Utilizando el modelo ajustado, evalúe la sensibilidad en  $T = 280$  K y  $T = 330$  K. Reporte el vector columna

$$\mathbf{S\_val} = \begin{bmatrix} S(280) \\ S(330) \end{bmatrix}.$$

- d) Durante una prueba de operación se registra una resistencia de

$$R = 3000 \ \Omega.$$

Utilizando el modelo ajustado, estime la temperatura correspondiente  $T^*$  (en K). Reporte el valor en la variable **T\_star**.

### Pregunta 3 - Probabilidad de Vida Útil Mínima (Integración Numérica)

La función de densidad de probabilidad exponencial aparece con frecuencia en estudios de confiabilidad cuando se modela el tiempo hasta la falla de un componente electrónico. En una línea de producción, el tiempo de vida útil  $T$  (en horas) de un sensor se modela mediante una distribución exponencial con parámetro  $\lambda$ . La probabilidad de que un sensor falle antes de un tiempo máximo  $x$  se define como:

$$\mathbb{P}(T \leq x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt.$$

Considere los valores:

$$\lambda = 0.002 \text{ h}^{-1} \quad x = 600 \text{ h}$$

En un script, realice lo siguiente:

- Halle el valor aproximado de la integral usando el método de **Simpson 1/3** con  $n = 8$  subintervalos. Almacene el resultado en la variable **I\_Simpson**.
- Construya la tabla de **Romberg** con orden  $kR = 4$ . Almacene dicha tabla en la variable **T\_romberg**.
- Calcule el valor **exacto** de la integral utilizando la herramienta simbólica de MATLAB. Denote dicho valor como **I\_exact**.

Luego, construya la tabla de error relativo porcentual respecto a **I\_exact**:

$$E_{j,k} = \left| \frac{R_{j,k} - \text{I\_exact}}{\text{I\_exact}} \right| \times 100$$

Almacene la tabla en la variable **Rerp**.

- Con el mejor resultado obtenido entre Simpson 1/3 y Romberg, estime la probabilidad de falla  $\mathbb{P}(T \leq x)$  y almacénela en la variable **Prob\_fail**.

#### Pregunta 4 - Respuesta de un Circuito RC con Fuente Sinusoidal (EDO)

Un laboratorio de electrónica estudia la respuesta temporal de un circuito RC sometido a una señal de excitación alterna. El objetivo es analizar la evolución del voltaje en el capacitor y determinar si el sistema alcanza un régimen periódico estable luego de un tiempo de operación.

El sistema experimental consta de:

- Una resistencia eléctrica de valor  $R$  (en  $\Omega$ ).
- Un capacitor de capacitancia  $C$  (en F).
- Una fuente de voltaje sinusoidal de amplitud constante.
- Un sistema de adquisición de datos que registra el voltaje  $V(t)$  (en V) en los terminales del capacitor.

Aplicando las leyes de Kirchhoff y las relaciones constitutivas de los elementos eléctricos, se obtiene el siguiente modelo matemático:

$$RC \frac{dV}{dt} = -V + 10 \sin(5t)$$

con condición inicial

$$V(0) = 0 \text{ V}$$

donde los parámetros del sistema son:

$$R = 1000 \Omega$$

$$C = 2 \times 10^{-3} \text{ F}$$

**En un script, realice lo siguiente:**

- Calcule la solución numérica usando el método de Euler con paso  $h = 0.1$  seg desde  $t = 0$  hasta  $t = 10$  seg. Almacene el vector de voltajes en la variable **V\_euler**.
- Calcule la solución numérica usando el método de Runge-Kutta de segundo orden (RK2) con el mismo paso  $h$  y tiempo final. Almacene el vector de concentraciones en la variable **V\_rk2**.
- Calcule la solución numérica utilizando la función **ode45** con el mismo paso  $h$  y tiempo final. Luego, determine el error cuadrático medio (RMSE) de la solución obtenida mediante el método de Euler respecto a **ode45**, así como el RMSE de la solución obtenida mediante RK2 respecto a **ode45**. Almacene los resultados en el vector columna

$$\mathbf{metrica} = \begin{bmatrix} RMSE_{euler} \\ RMSE_{rk2} \end{bmatrix}, \quad RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

- Determine cuál de los dos métodos numéricos presenta menor error respecto a la solución obtenida con **ode45**. Si el método RK2 tiene un RMSE menor que el método de Euler, asigne **rk2\_mejor = 1**. En caso contrario, asigne **rk2\_mejor = 0**.