

Duración: 90 minutos

Fecha: 26 de junio de 2026

-
- El examen consta de 4 problemas, cada uno con un valor de 5 puntos, sumando un total de 20 puntos.
 - Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
 - Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección, el número de la pregunta y el código ID de la pregunta. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
 - Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en la tarea de Examen Laboratorio 06 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
 - Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
 - El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
 - El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
 - Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
 - No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
 - Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

Pregunta 1: Campo Eléctrico en un Canal de Aceleración Iónica

En un prototipo de micropropulsor iónico, se mide el potencial electrostático $\Phi = \Phi(z)$ a lo largo del eje central del canal de aceleración. La variación espacial de este potencial permite estimar el campo eléctrico axial que acelera a los iones, definido por

$$E_z(z) = -\frac{d\Phi}{dz}. \quad (1)$$

A partir de mediciones experimentales, se obtuvo la siguiente data:

z (cm)	0	12	25	40	58	75	95
Φ (V)	120.0	108.0	86.0	72.0	48.0	42.0	35.0

- a) Defina un **spline cúbico natural** usando la data del potencial electrostático y reporte los coeficientes de los polinomios cúbicos en la variable **Coef**, considerando que cada tramo del spline está dado por

$$\Phi_i(z) = a_i(z - z_i)^3 + b_i(z - z_i)^2 + c_i(z - z_i) + d_i.$$

Almacene los coeficientes en la matriz

$$\mathbf{Coef} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n & b_n & c_n & d_n \end{bmatrix},$$

donde cada fila corresponde a un intervalo del spline.

- b) Determine el **campo eléctrico axial** $E_z(z)$ en los puntos $z = 18$ cm y $z = 62$ cm. Utilice una representación simbólica de los tramos correspondientes del spline para calcular dichos campos a partir de la ecuación (1) y almacene los resultados numéricos en el vector fila

$$\mathbf{Eval} = [E18 \quad E62].$$

- c) Determine el **punto de mayor aceleración iónica** entre $z = 30$ cm y $z = 70$ cm. Para ello, genere 500 puntos uniformemente distribuidos y calcule el campo eléctrico axial $E_z = E_z(z)$ usando el spline cúbico natural. Determine el punto (de esta discretización) donde la magnitud $|E_z(z)|$ alcanza su valor máximo. Almacene el resultado en el vector fila

$$\mathbf{Emaxinfo} = [z_{\text{máx}} \quad |E_z(z_{\text{máx}})|].$$

En caso existan varios puntos con el mismo valor máximo, considere el primero de ellos.

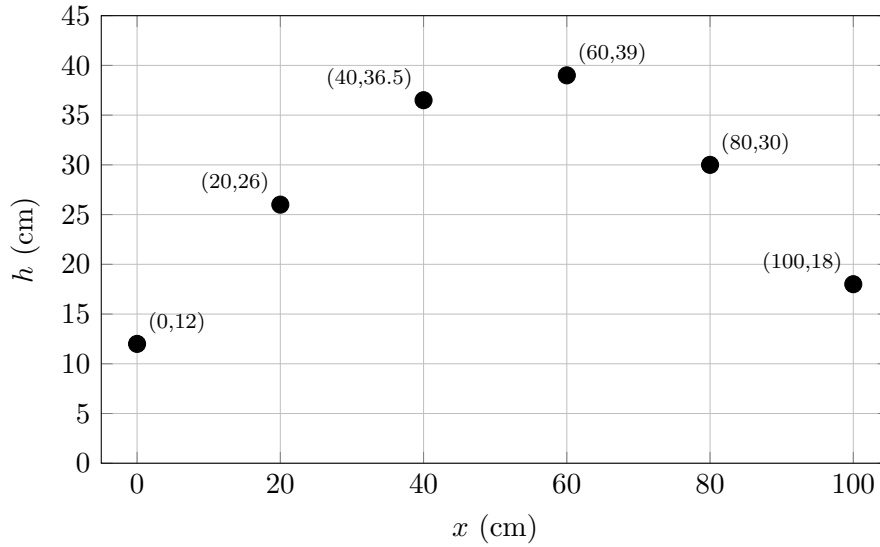
- d) Evalúe si, en algún punto de cada intervalo del spline, la magnitud del campo eléctrico axial supera (es mayor que) el valor de 1.40 V/cm. Para ello, genere 200 puntos en cada intervalo, incluidos sus extremos, calcule $|E_z(z)|$ en dichos puntos y determine si algún punto supera dicho valor. Finalmente, almacene la cantidad de intervalos que excedieron ese campo eléctrico en la variable **ninterv**.

Pregunta 2: Trayectoria de un Chorro de Fluido

En un laboratorio de mecánica de fluidos se analiza la trayectoria de un chorro de agua emitido desde una boquilla inclinada. Debido a la acción de la gravedad, la altura h del chorro respecto al nivel de referencia puede aproximarse mediante un modelo cuadrático en función de la distancia horizontal x :

$$h(x) = ax^2 + bx + c, \quad (2)$$

donde x y h se miden en cm. La siguiente gráfica muestra las mediciones experimentales de la altura del chorro para distintas posiciones horizontales:



Se desea obtener un modelo matemático que permita aproximar la trayectoria del chorro y analizar algunas características físicas del movimiento.

- a) Plantee el ajuste por mínimos cuadrados para dicho modelo (2) y reporte la matriz del sistema de ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} \sum x_i^4 & \sum x_i^3 & \sum x_i^2 \\ \sum x_i^3 & \sum x_i^2 & \sum x_i \\ \sum x_i^2 & \sum x_i & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum x_i^2 h_i \\ \sum x_i h_i \\ \sum h_i \end{bmatrix}.$$

Almacene la matriz del sistema de ecuaciones normales en la variable **Mtray**.

- b) Determine los coeficientes del modelo cuadrático ajustado. Reporte los coeficientes en el vector fila **coefTray** = $[a \ b \ c]$.
- c) Utilizando el modelo cuadrático ajustado, determine la posición horizontal donde el chorro alcanza su altura máxima y el valor de dicha altura máxima. Además, estime el alcance horizontal del chorro, definido como la raíz positiva del modelo ajustado para la cual $h(x) = 0$. Almacene estos resultados en el vector fila **infoTray** = $[x_{\text{máx}} \ h_{\text{máx}} \ x_{\text{alcance}}]$.
- d) Calcule la suma total de cuadrados S_t , la suma de cuadrados de los residuos S_r y el coeficiente de determinación R^2 , definidos por

$$S_t = \sum_{i=1}^n (h_i - \bar{h})^2, \quad S_r = \sum_{i=1}^n (h_i - h(x_i))^2, \quad R^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}.$$

Almacene los resultados en el vector fila **calidadTray** = $[S_t \ S_r \ R^2]$.

Pregunta 3 - Energía Absorbida por un Microactuador Fototérmico

En un experimento de fototermia, un microactuador es excitado mediante un pulso láser modulado. La potencia térmica instantánea absorbida por el dispositivo se modela mediante la función

$$P(t) = 10e^{-0.35t} (1 + 0.25 \sin(2t)) + 0.4te^{-0.5t}, \quad (3)$$

donde $P(t)$ se mide en watts y t en segundos. La energía total absorbida durante los primeros 8 segundos está dada por

$$E = \int_0^8 P(t) dt.$$

- a) Calcule la integral E usando el método del **trapecio compuesto** con $n = 40$ subintervalos y el método de **Simpson 1/3 compuesto** con $n = 40$ subintervalos. Almacene los resultados en el vector fila

$$\mathbf{I_comp} = [I_{\text{Trap}} \quad I_{\text{Simpson}}].$$

- b) Construya una tabla de Romberg de 6 niveles. Use como primera columna las aproximaciones del trapecio compuesto con 1, 2, 4, 8, 16 y 32 subintervalos, respectivamente. Usando la extrapolación

$$R_{j,k} = \frac{4^{k-1} R_{j+1,k-1} - R_{j,k-1}}{4^{k-1} - 1}.$$

Almacene la tabla triangular en la variable **T_romberg**, dejando ceros en las entradas no utilizadas.

- c) Calcule el valor **exacto** de la integral utilizando la herramienta simbólica de MATLAB y almacénelo en la variable **I_exact** numérico tipo double. Luego, calcule el error relativo porcentual del trapecio compuesto con $n = 40$, de Simpson 1/3 compuesto con $n = 40$, y de la aproximación de Romberg $R_{1,6}$, respecto a **I_exact**:

$$E_{\%} = \left| \frac{I_{\text{aprox}} - \mathbf{I_exact}}{\mathbf{I_exact}} \right| \times 100.$$

Almacene los errores en el vector fila **Err_met** = $[E_{\text{Trap}} \quad E_{\text{Simpson}} \quad E_{\text{Romberg}}]$.

- d) Determine el menor número par de subintervalos $n_{\text{mín}}$ para el método de Simpson 1/3 compuesto, comenzando desde $n = 2$ e incrementando de dos en dos, tal que

$$|I_{\text{Simpson}}(n) - R_{1,6}| \leq 10^{-4}.$$

Almacene el resultado en el vector fila **SimpsonTol** = $[n_{\text{mín}} \quad I_{\text{Simpson}}(n_{\text{mín}})]$.

- e) Considere ahora la siguiente discretización no uniforme del intervalo $[0, 8]$:

$$\mathbf{tvar} = [0 \quad 0.20 \quad 0.45 \quad 0.75 \quad 1.10 \quad 1.50 \quad 2.00 \quad 2.60 \quad 3.30 \quad 4.20 \quad 5.20 \quad 6.40 \quad 8.00].$$

Aplice el método del trapecio con paso variable sobre dicha discretización. Además, calcule el trapecio compuesto uniforme usando el mismo número de subintervalos, es decir, $n = 12$. Almacene las aproximaciones y sus errores relativos porcentuales respecto a **I_exact** en el vector fila **TrapVar** = $[I_{\text{Trap,unif}} \quad I_{\text{Trap,var}} \quad E_{\text{Trap,unif}} \quad E_{\text{Trap,var}}]$.

Obs: Si considera necesario, elabore una función **Tvarcomp(f,x)**, para aplicar el método de trapecio con paso variable.

Pregunta 4 - Enfriamiento de un Microchip con Pulso Térmico Transitorio

En un laboratorio de instrumentación térmica se analiza la respuesta de un microchip luego de recibir un pulso térmico breve producido por una fuente óptica. El chip intercambia calor con el ambiente y, simultáneamente, recibe una excitación térmica cuya temperatura $T = T(t)$, medida en °C, se modela mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dT}{dt} = -0.35(T - 25) + 2.5e^{-0.4t} \cos(1.2t), \quad T(0) = 40. \quad (4)$$

donde t se mide en segundos. Se desea aproximar la evolución térmica del microchip en el intervalo $0 \leq t \leq 10$, usando un paso

$$h = 0.1.$$

- Calcule la solución numérica usando el método de **Euler** desde $t = 0$ hasta $t = 10$. Almacene el vector columna de temperaturas en la variable **Temp_euler**.
- Calcule la solución numérica usando el método de **Runge–Kutta de segundo orden tipo Heun** desde $t = 0$ hasta $t = 10$, con el mismo paso h . Almacene el vector columna de temperaturas en la variable **Temp_rk2**.
- Calcule la solución numérica utilizando la función **ode45** con el vector temporal $0 : h : 10$. Almacene el vector columna de temperaturas obtenido con **ode45** en la variable **Temp_ode45**.
- Compare los métodos de Euler y RK2-Heun respecto a la solución obtenida con **ode45** en los tiempos $t = 2$, $t = 6$ y $t = 10$. Para ello, calcule los errores absolutos

$$E_{\text{Euler}}(t_i) = |T_{\text{Euler}}(t_i) - T_{\text{ode45}}(t_i)|, \quad E_{\text{RK2}}(t_i) = |T_{\text{RK2}}(t_i) - T_{\text{ode45}}(t_i)|.$$

Almacene los resultados en la matriz

$$\mathbf{Err_temp} = \begin{bmatrix} E_{\text{Euler}}(2) & E_{\text{RK2}}(2) \\ E_{\text{Euler}}(6) & E_{\text{RK2}}(6) \\ E_{\text{Euler}}(10) & E_{\text{RK2}}(10) \end{bmatrix}.$$