

Duración: 90 minutos

Fecha: 19 de febrero de 2026

-
- El examen consta de 4 problemas, cada uno con un valor de 5 puntos, sumando un total de 20 puntos.
 - Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
 - Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección, el número de la pregunta y el código ID de la pregunta. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
 - Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en la tarea de Examen Laboratorio 02 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
 - Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
 - El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
 - El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
 - Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
 - No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
 - Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

Pregunta 1 - Spline

Utilice un spline cúbico natural $S(x)$ para aproximar $f(x) = \frac{10}{1+x^2}$, utilizando los siguientes puntos $x_0 = -5$, $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = 0$, $x_4 = 3$ y $x_5 = 4$.

En un script, realice lo siguiente:

- a) Sean A la cantidad total de coeficientes a determinar, B la cantidad de subfunciones del spline $S(x)$ y C el tamaño del sistema de ecuaciones lineales a resolver de acuerdo al método estudiado en clases de teoría y laboratorio, almacene el valor de $(A + B + C)$ en la variable **teoria**.
- b) Almacene en la variable **suma**, la suma de coeficientes de la subfunción $S_3(x)$.
- c) Almacene en la variable **valor** el resultado de calcular $S(-1)$.
- d) Almacene en la variable **valor1** el resultado de calcular $S''(3.5)$.

Pregunta 2: Calibración de un sensor de presión (Ajuste de Curvas)

En un banco de pruebas hidráulico se calibra un sensor de presión que entrega una señal de voltaje V (en voltios) como función de la presión aplicada P (en kPa). Debido a ligeras no linealidades del transductor y de la electrónica de acondicionamiento, la relación $V(P)$ no es perfectamente lineal.

Se realizaron mediciones con un manómetro patrón y se obtuvieron los siguientes datos:

P (kPa)	0	50	100	150	200	250
V (V)	0.02	0.98	2.05	3.10	4.15	5.30

Se desea usar esta calibración no solo para estimar presiones, sino también para derivar magnitudes físicas posteriores (sensibilidad e intensidad de fuerza sobre un actuador).

En un script, realice lo siguiente:

- a) Plantée el ajuste por mínimos cuadrados para obtener del modelo cuadrático

$$V(P) = a + bP + cP^2,$$

y reporte la matriz del sistema de ecuaciones normales

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n V_i \\ \sum_{i=1}^n V_i P_i \\ \sum_{i=1}^n V_i P_i^2 \end{bmatrix}$$

en la variable **A**.

- b) Ajuste por mínimos cuadrados el modelo cuadrático $V(P) = a + bP + cP^2$, y reporte los coeficientes en el vector fila **coef** = $[a \ b \ c]$.
- c) Defina la *sensibilidad* del sensor como

$$S(P) = \frac{dV}{dP}.$$

Obtenga una expresión explícita de $S(P)$ usando el modelo ajustado y evalúe $S(P)$ en $P = 0$ kPa y en $P = 250$ kPa. Reporte un vector columna

$$\mathbf{S_val} = \begin{bmatrix} S(0) \\ S(250) \end{bmatrix}.$$

- d) En una prueba posterior, el sensor registra un voltaje $V = 3.50$ V. Usando el modelo ajustado en el ítem (a), estime la presión correspondiente P^* (en kPa). Reporte el valor de P^* en la variable **P_star**. **Nota:** la función *roots* permite encontrar las raíces de un polinomio.

Pregunta 3 - Probabilidad de Aceptación (Integración Numérica)

La función de distribución acumulativa (CDF) asociada a una variable aleatoria normal $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ aparece con frecuencia en control de calidad cuando una medición está afectada por ruido gaussiano. En una estación de inspección automática, la lectura Y (en mm) de una dimensión crítica de una pieza se modela como normal con media μ y desviación estándar σ . La probabilidad de que una pieza sea aceptada bajo una tolerancia superior x se define como:

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt.$$

Para evitar el límite $-\infty$ en el cálculo numérico, se puede emplear la aproximación práctica:

$$\mathbb{P}(Y \leq x) \approx \int_{\mu-5\sigma}^x \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dt,$$

ya que el aporte de la cola a la izquierda de $\mu - 5\sigma$ es despreciable.

Considere los valores:

$$\mu = 50 \text{ mm} \quad \sigma = 0.20 \text{ mm} \quad x = 50.25 \text{ mm}$$

En un script, realice lo siguiente:

- Halle el valor aproximado de la integral usando el método de **Simpson 1/3** con $n = 8$ subintervalos. Almacene el resultado en la variable **I_Simpson**.
- Construya la tabla de **Romberg** con orden $kR = 4$. Almacene dicha tabla en la variable **T_romberg**.
- Calcule el valor **exacto** de la integral utilizando la herramienta simbólica de MATLAB. Denote dicho valor como **I_exact**.

Luego, a partir de la tabla de **Romberg** obtenida en el ítem anterior, construya una nueva tabla cuyos elementos correspondan al **error relativo porcentual** de cada aproximación respecto a I_{exact} .

Sea $R_{j,k}$ el elemento ubicado en la fila j y columna k de la tabla de Romberg, con $j, k \geq 1$. Defina:

$$E_{j,k} = \left| \frac{R_{j,k} - I_{\text{exact}}}{I_{\text{exact}}} \right| \times 100$$

Almacene la tabla de errores relativos porcentuales en la variable **Rerp**, manteniendo la misma estructura dimensional que la tabla de Romberg original.

- Con el mejor resultado obtenido del ítem (a) y (b) (integral numérica con menor error relativo porcentual), estime la probabilidad de aceptación $\mathbb{P}(Y \leq x)$ y almacénela en la variable **Prob_accept**.

Pregunta 4 - Dinámica de Concentración en Tanque de Mezcla (EDO)

Una planta de procesamiento químico requiere garantizar que la concentración de un aditivo en un tanque de mezcla alcance un valor mínimo antes de iniciar la siguiente etapa del proceso. El tanque opera con volumen constante y flujo continuo, de modo que el caudal de entrada es igual al de salida, asegurando condiciones de mezcla perfecta.

El sistema experimental consta de:

- Un tanque de volumen constante V (en L).
- Una bomba que suministra solución con concentración constante C_{in} (en g/L).
- Un sistema de control de flujo que mantiene un caudal volumétrico constante q (en L/min).
- Un sensor digital que registra la concentración $C(t)$ (en g/L) dentro del tanque.

El modelo matemático que describe la evolución de la concentración en el tanque es:

$$\frac{dC}{dt} = \frac{q}{V} (C_{in} - C(t))$$

donde los valores del sistema son:

$$\begin{aligned}q &= 4 \text{ L/min} \\V &= 100 \text{ L} \\C_{in} &= 10 \text{ g/L} \\C(0) &= 0 \text{ g/L}\end{aligned}$$

En un script, realice lo siguiente:

- Calcule la solución numérica usando el método de Euler con paso $h = 0.5$ min desde $t = 0$ hasta $t = 200$ min. Almacene el vector de concentraciones en la variable **C_euler**.
- Calcule la solución numérica usando el método de Runge–Kutta de cuarto orden (RK4) con el mismo paso y tiempo final. Almacene el vector de concentraciones en la variable **C_rk4**.
- Determine el tiempo en el que la concentración alcanza por primera vez los 8 g/L utilizando ambos métodos. Almacene los tiempos en el vector columna

$$\mathbf{t_cruce} = \begin{bmatrix} t_{euler} \\ t_{rk4} \end{bmatrix}.$$

- Si RK4 predice un cruce más temprano que Euler, asigne **rk4c = 1**. En caso contrario, asigne **rk4c = 0**.