
Examen de Laboratorio 2

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 90 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección, el número de la pregunta y el código ID de la pregunta en el formulario disponible en la tarea de canvas. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en la tarea de Examen Laboratorio 2 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

Pregunta 1 - Spline en funciones de onda

Sea la función

$$f(x) = 4e^{-x/1.2} \sin(6\pi x)$$

definida en los nodos:

$$x_0 = 0, \quad x_1 = 0.02, \quad x_2 = 0.04, \quad x_3 = 0.06, \quad x_4 = 0.08.$$

Se desea construir el **spline cúbico natural** $S(x)$ en dichos nodos, donde cada tramo tiene la forma:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i.$$

Realice lo siguiente:

- a) Calcule los coeficientes del spline cúbico natural y asigne a la variable **sumacoeef** la suma

$$a_1 + b_1 + c_1 + d_1$$

correspondiente al primer tramo $[x_0, x_1]$.

- b) Evalúe el spline en $x = 0.018$ y asigne el resultado a **fvalue**.
c) Evalúe la **primera derivada del spline** en $x = 0.036$ y guarde el resultado en **dfvalue**.
d) Evalúe la **segunda derivada del spline** en $x = 0.08$, y asigne el resultado a **df2value**.

Pregunta 2 - Ajuste por Mínimos Cuadrados

– Calibración de un Sensor de Temperatura

En un experimento de calibración se midió la temperatura registrada por un sensor (en °C) frente a distintos valores de voltaje de entrada (en V). Los datos experimentales obtenidos fueron:

$$x_i = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 1.0 \\ 1.5 \\ 2.0 \\ 2.5 \end{bmatrix} \quad (\text{Voltaje en V}), \quad y_i = \begin{bmatrix} 12.3 \\ 19.8 \\ 27.4 \\ 34.9 \\ 42.1 \end{bmatrix} \quad (\text{Temperatura en } ^\circ\text{C}).$$

Realice lo siguiente:

- Construya la matriz $M = [x_i \ 1]$. Almacene en la variable **M**.
- Calcule la matriz del sistema sobredeterminado $A = M^T M$ y el vector $B = M^T y_i$. Construya la matriz aumentada $[A \ B]$ y almacénela en la variable **AB**.
- Resuelva el sistema $Ap = B$ para encontrar el vector de parámetros $p = \begin{bmatrix} m \\ b \end{bmatrix}$. Almacene este vector en la variable **p**.
- Defina la función de regresión $f(x) = mx + b$. Calcule la suma de los residuos al cuadrado S_r , la suma total de cuadrados S_t y el coeficiente de determinación r^2 . Finalmente, guarde en la variable **metric** el vector

$$\text{metric} = [S_r \ S_t \ r^2].$$

Pregunta 3 - Integración Numérica – Probabilidad en una Normal Estándar

Sea Z una variable aleatoria con distribución normal estándar, cuya densidad es

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2}.$$

La probabilidad de que Z tome valores entre 0 y x viene dada por

$$P(0 \leq Z \leq x) = \int_0^x \phi(t) dt.$$

Deseamos aproximar $P(0 \leq Z \leq 1.5)$ usando integración numérica.

En un script, realice lo siguiente:

- a) Calcule una aproximación de la integral

$$\int_0^{1.5} \phi(t) dt$$

usando la Cuadratura Gaussiana con $n = 4$ puntos y almacene el resultado en `I_gauss4`.

- b) Calcule una aproximación de la misma integral utilizando el método de Romberg de orden 6 y almacene el resultado en `I_romberg`.

- c) Aplique el método de Cuadratura Gaussiana iterativamente desde $n = 2$ puntos hasta encontrar el valor de n tal que el error relativo entre integrales sucesivas sea menor que una tolerancia de $1e-6$. Almacene los resultados en una matriz `R_gauss` = $[i \quad n \quad I_{gauss} \quad dr]$, donde i : número de iteración $i = 0$ para $n = 2$, n : número de puntos en la cuadratura, I_{gauss} : valor de la integral y dr : error relativo calculado como: $dr = \frac{|I_{gauss,i} - I_{gauss,i-1}|}{I_{gauss,i}}$ para $i > 0$; $dr = 1$ para $i = 0$.

- d) Finalmente, usando el valor más preciso obtenido, aproxime la probabilidad $P(0 \leq Z \leq 1.5)$ y almacene el resultado en la variable `P_0_1p5`.

Pregunta 4 - EDO de Primer Orden – Enfriamiento de Newton

Un objeto caliente se enfría en una habitación a temperatura constante de 20°C . La evolución de su temperatura $T(t)$ se modela mediante:

$$\frac{dT}{dt} = -k (T(t) - T_{\text{amb}}),$$

donde $k = 0.05 \text{ min}^{-1}$ y $T_{\text{amb}} = 20^{\circ}\text{C}$. La condición inicial es $T(0) = 90^{\circ}\text{C}$.

En un script, realice lo siguiente:

- Calcule la solución numérica usando el método de Euler con paso $h = 2$ desde $t = 0$ hasta $t = 200$. Almacene el vector (columna) solución en **T_euler**.
- Calcule la solución numérica usando el método de Runge–Kutta de cuarto orden (RK4) con el mismo paso. Almacene el vector (columna) solución en **T_rk4**.
- Determine el tiempo en que el objeto baja por primera vez de 40°C usando ambos métodos. Almacene los tiempos en el vector columna:

$$\mathbf{t_cruce} = \begin{bmatrix} \mathbf{t_euler} \\ \mathbf{t_rk4} \end{bmatrix}.$$

- Si RK4 predice un cruce más temprano que Euler, asigne **mrk4** = 1; en caso contrario, asigne **mrk4** = 0.

Pregunta 5 - Sistemas EDO - Motor CC acoplado a carga

En el análisis dinámico de un motor de corriente continua acoplado mecánicamente a una carga mediante un eje flexible, se pueden combinar la ecuación eléctrica del circuito de armadura, la ecuación de movimiento rotacional del rotor y la torsión elástica del acoplamiento, obteniéndose un modelo dinámico que describe la evolución del **desplazamiento angular del eje**, $\theta(t)$. Bajo ciertas condiciones de operación, este modelo se puede reducir a la siguiente ecuación diferencial lineal real de tercer orden:

$$\theta'''(t) + 2.1 \theta''(t) + 4.2 \theta'(t) + 10 \theta(t) = -10V(t)$$

donde $V(t)$ es la tensión aplicada al motor (en voltios). Para este estudio, se aplica una excitación eléctrica dada por $V(t) = 5t$.

Inicialmente, el eje presenta una pequeña desviación angular y el motor parte en reposo. Por lo que se tiene lo siguiente:

$$\theta(0) = 0.05 \text{ rad}, \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta''(0) = 0$$

Se desea conocer el comportamiento dinámico del sistema en el intervalo $t \in [0, 2]$. Considere una partición uniforme de dicho intervalo en $n = 8$ subintervalos ($h = 0.25$ s). Se pide:

1. Resuelva la ecuación diferencial utilizando el comando `dsolve` de MATLAB. Luego, evalúe la solución y sus dos primeras derivadas en $t = 2$ s. Almacene el siguiente vector columna en la variable `exacta`:

$$\text{exacta} = \begin{bmatrix} \theta(2) \\ \theta'(2) \\ \theta''(2) \end{bmatrix}$$

2. Transforme la ecuación de tercer orden en un sistema equivalente de primer orden y aplique el método de **Runge - Kutta de cuarto orden (RK4)** con $n = 8$ subintervalos. Almacene el vector columna aproximado en `aproxRK4`:

$$\text{aproxRK4} = \begin{bmatrix} \tilde{\theta}(2) \\ \tilde{\theta}'(2) \\ \tilde{\theta}''(2) \end{bmatrix}$$

3. Almacene el error relativo generado por la aproximación a $\theta(2)$ en la variable `error1`.
4. Almacene el error relativo generado por la aproximación a $\theta'(2)$ en la variable `error2`.