
Examen de Laboratorio 2

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 90 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección, el número de la pregunta y el código ID de la pregunta en el formulario disponible en la tarea de canvas. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en la tarea de Examen Laboratorio 2 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

Pregunta 1 - Spline Cúbico Natural – Perfil de Canal de Riego

Un canal de riego en una zona agrícola ha sido excavado siguiendo un perfil no lineal para adaptarse al terreno natural. A lo largo del canal se han medido las **cotas del fondo del canal** (elevación respecto a una referencia) en ciertos puntos de control. Los datos obtenidos son:

$$x = [0, 5, 10, 15, 20, 25]$$

$$y = [2.0, 1.7, 1.4, 1.3, 1.5, 1.8]$$

- Use la función dada en la plantilla para definir un **spline cúbico natural** y determine la **pendiente del fondo del canal** en los puntos $x = 7$ m y $x = 18$ m. Guarde los resultados en las variables **m7** y **m18**.
- Luego de graficar el spline cúbico natural, use el comando **solve** de MATLAB para determinar la **cota mínima del fondo del canal** dentro del intervalo $[0, 25]$. Guarde su respuesta en la variable **hmin**.
- Se sabe que la pendiente máxima admisible en magnitud para este tipo de canal es 0.08. Indique si existe algún **intervalo** donde la pendiente del spline en valor absoluto supere dicho límite y defina la variable **ninterv** como el **número de intervalos en los cuales se excede esta pendiente admisible**.

Pregunta 2 - ajuste por Mínimos Cuadrados – Caída de Presión en Tubería

En una prueba hidráulica se midió la **caída de presión** ΔP en una tubería recta para distintos valores de **caudal volumétrico** Q . Se propone el modelo no lineal

$$\Delta P \approx A Q^B,$$

donde A y B son parámetros desconocidos.

Los datos experimentales son:

Q_i (L/s)	2	4	6	8	10	12
ΔP_i (kPa)	2.1	8.7	18.5	31.8	49.6	71.2

Para ajustar el modelo no lineal $\Delta P_i = A Q_i^B$ usando mínimos cuadrados, se utiliza la linealización:

$$\ln(\Delta P_i) = \ln A + B \ln(Q_i).$$

Realice lo siguiente:

- Defina los vectores $\mathbf{Q_i}$ y $\mathbf{DPi}$ con los datos de la tabla. Construya los vectores $X = \ln(Q_i)$ y $Y = \ln(\Delta P_i)$. Luego construya la matriz $M = [X \ 1]$ y almacénela en la variable $\mathbf{M}$.
- Calcule la matriz del sistema sobredeterminado $A = M^T M$ y el vector $B = M^T Y$. Construya la matriz aumentada $[A \ B]$ y almacénela en la variable $\mathbf{AB}$.
- Resuelva el sistema $Aq = B$ para encontrar el vector de parámetros linealizados $q = \begin{bmatrix} B \\ \ln A \end{bmatrix}$. A partir de q , obtenga los parámetros del modelo original $A = e^{q_2}$ y $B = q_1$. Almacene los parámetros finales en la variable $\mathbf{p} = [A; B]$.
- Defina la función de regresión no lineal $f(Q) = A Q^B$. Calcule la suma de los residuos al cuadrado $S_r = \sum (\Delta P_i - f(Q_i))^2$, la suma total de cuadrados $S_t = \sum (\Delta P_i - \overline{\Delta P})^2$ y el coeficiente de determinación $r^2 = 1 - S_r/S_t$. Finalmente, almacene estos resultados en la variable

$$\mathbf{metric} = [S_r \ S_t \ r^2].$$

Pregunta 3 - Integración Numérica – Cálculo de la Integral de Fresnel S(x)

La función de Fresnel S se define mediante la integral

$$S(x) = \int_0^x \sin(t^2) dt.$$

Esta función es importante en problemas de difracción y óptica ondulatoria. Deseamos calcular $S(2.5)$ usando integración numérica.

En un script realice lo siguiente:

- a) Calcule una aproximación de la integral

$$\int_0^{2.5} \sin(t^2) dt$$

usando Cuadratura Gaussiana con $n = 5$ puntos y almacene el resultado en **I_gauss5**.

- b) Calcule una aproximación de la misma integral usando el método de Romberg de orden 6 y almacene el resultado en **I_romberg**.

- c) Aplique el método de Cuadratura Gaussiana iterativamente desde $n = 2$ puntos hasta encontrar el valor de n tal que el error relativo entre integrales sucesivas sea menor que una tolerancia de $1e-6$. Almacene los resultados en una matriz **Rgauss** = $[i \quad n \quad I_{gauss} \quad dr]$, donde i : número de iteración $i = 0$ para $n = 2$, n : número de puntos en la cuadratura, I_{gauss} : valor de la integral y dr : error relativo calculado como: $dr = \frac{|I_{gauss,i} - I_{gauss,i-1}|}{I_{gauss,i}}$ para $i > 0$; $dr = 1$ para $i = 0$.

- d) Finalmente, determine el valor aproximado de $S(2.5)$ usando el valor más preciso obtenido y almacénelo en **S_25**.

Pregunta 4 - EDO de Primer Orden - Carga de un Condensador RC

Considere un circuito RC en serie formado por una resistencia R y un condensador C conectados a una fuente de voltaje constante V_s . El voltaje en el condensador $V(t)$ satisface la ecuación:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{V_s - V(t)}{RC},$$

donde $V_s = 12\text{ V}$, $R = 2000\ \Omega$ y $C = 100 \times 10^{-6}\text{ F}$. La condición inicial es $V(0) = 0\text{ V}$.

En un script realice lo siguiente:

- Calcule la solución numérica usando el método de Euler con paso $h = 0.05\text{ s}$ desde $t = 0$ hasta $t = 2\text{ s}$. Almacene el vector columna de voltajes en la variable `V_euler`.
- Calcule la solución numérica usando el método de Runge–Kutta de cuarto orden (RK4) con el mismo paso y tiempo. Almacene el vector columna de voltajes en la variable `V_rk4`.
- Determine el tiempo en que el voltaje en el condensador alcanza por primera vez los 9 V utilizando ambos métodos. Almacene los tiempos en el vector columna:

$$\mathbf{t_cruce} = \begin{bmatrix} t_{\text{euler}} \\ t_{\text{rk4}} \end{bmatrix}.$$

- Si RK4 predice un cruce más temprano que Euler, asigne `mrk4 = 1`; en caso contrario, asigne `mrk4 = 0`.

Pregunta 5 - Sistemas EDO – Competencia Biológica con Recurso Limitado

Dos especies $X(t)$ y $Y(t)$ compiten por un mismo recurso limitado. Su dinámica está dada por el sistema:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= r_1 X \left(1 - \frac{X + \alpha Y}{K_1} \right) \\ \frac{dY}{dt} &= r_2 Y \left(1 - \frac{Y + \beta X}{K_2} \right)\end{aligned}$$

Los parámetros y condiciones iniciales son:

$$\begin{aligned}X(0) &= 20, & Y(0) &= 15, & r_1 &= 0.8, & r_2 &= 0.6, \\ K_1 &= 100, & K_2 &= 80, & \alpha &= 0.4, & \beta &= 0.3.\end{aligned}$$

- a) Obtenga la solución numérica mediante el método de **Euler** en el intervalo $[0, 40]$ con paso $h = 1$. Almacene:

$$\text{sol_euler} = [\text{t_euler} \quad \text{X_euler} \quad \text{Y_euler}]$$

- b) Obtenga la solución mediante el método de **Runge–Kutta de cuarto orden (RK4)** con el mismo paso. Almacene:

$$\text{sol_rk4} = [\text{t_rk4} \quad \text{X_rk4} \quad \text{Y_rk4}]$$

- c) Compare gráficamente ambas soluciones.
- d) Determine cuál método produce una **mayor acumulación de la población** $X(t)$ usando la **regla de Simpson 1/3**. Almacene:

$$\text{IX} = [\text{I_mayor} \quad ; \quad \text{I_menor}]$$