

EXAMEN DE LABORATORIO EL2 - TEO 7 (ESP)

Métodos Numéricos

7 de febrero de 2026

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 100 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- No hay reclamos, pues el examen está debidamente filtrado y validado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. Se desea diseñar la trayectoria plana a seguir por un brazo robot para que transporte diferentes piezas de un lugar a otro. Dicho mecanismo ha de moverse de forma suave para que no caigan los elementos transportados, y para que no se dañen sus articulaciones. Se ha de diseñar la trayectoria con un número de puntos por los que debe pasar: partiendo de punto inicial que suponemos el origen $(0, 0)$, el brazo debe dirigirse al punto $(7, 6)$ en donde recogerá una pieza, aunque previamente tendrá que pasar por dos puntos de control, el $(2, 4)$ y el $(6, 4)$. Finalmente debe llegar hasta el punto $(15, 1)$ en donde dejará la pieza en cuestión, pero pasando antes por el punto de control $(12, 7)$. Pruebas adecuadas sugieren que la curva que debe seguir el brazo robótico es un spline en general, considere que el brazo robótico pasa por los puntos (x, y) tales que $y = S(x)$, siendo S la función spline que pasa por los puntos dados. Realice lo siguiente:
 - a) Construya un spline cúbico natural (desarrollado en clase) que describa la trayectoria del brazo robótico, luego, sabiendo que el brazo robótico pasa por el punto $(7.5, a)$ determine el valor de a , almacene su respuesta en la variable **valor**.
 - b) El brazo robotico necesita ser recalibrado si a medio camino, es decir, para $x = 7.5$ el valor de y es tal que $y < 7$. Almacene en la variable **opc** el valor de 1 si el brazo robótico necesita ser recalibrado o en caso contrario almacene el valor de 0 en **opc**. Para resolver este ítem en su totalidad utilice el comando **spline** de Matlab.
 - c) Si S es el spline cúbico natural (desarrollado en clase) determine $S(8)$, almacene su respuesta en **aprox**.
 - d) Si S_1 es el spline proporcionado por Matlab (con el comando **spline**) determine $S_1(8)$, almacene su respuesta en **exacta**.
2. Un problema que se nos presenta es la predicción del rendimiento de un cultivo de trigo en toneladas por hectárea (t/ha) a lo largo de 10 años, considerando las condiciones climáticas y el manejo agrícola. En este caso, utilizaremos los datos históricos de producción para proyectar el rendimiento durante los próximos dos años con la mejor curva de ajuste. Considerando la siguiente data historica de los ultimos 8 años:

Año	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023	2024
Rendimiento (t/ha)	3.9	5.0	7.8	10.3	9.7	6.0	5.6	4.5

Ajuste a los datos una función de la forma $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $x = 1$ representa 2017; $x = 2$ representa 2018 y así sucesivamente, mientras tanto $f(x)$ es el rendimiento en el año x para ello:

- a) Luego de hallar función que mejor se ajusta a los puntos dados, determine el valor de $(a + b + c)$ almacene su respuesta en la variable **sumacf**.
- b) De acuerdo al modelo hallado, estime el rendimiento del cultivo para este año 2025 y asigne dicho valor a la variable **aprox**.
- c) Halle el coeficiente de determinación r^2 y asigne su valor a la variable **deter**.
- d) Según el valor del coeficiente de determinacion hallado, ¿la función $f(x)$ es un buen ajuste? Si la respuesta es afirmativa, asigne a la variable **opc** el valor de 1, en caso contrario, asigne el valor de 0.

Nota:

Si $f(x)$ es la función de ajuste, consideremos las expresiones: $S_r = \sum_{i=1}^n e_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - f(x_i))^2$ y $S_t = \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$ donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son las medias de x e y respectivamente. Entonces: $r^2 = \frac{S_t - S_r}{S_t}$. Algunos autores manifiestan que para un r^2 mayor o igual a 0.7 se tiene un buen ajuste.

3. Considere la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ con $-1 \leq x \leq 1$ esta función al rotar alrededor del eje X genera un sólido de revolución como el mostrado: Se sabe que si la función

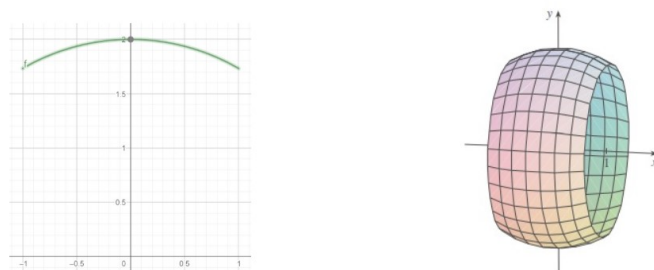


Figura 1: Función y su rotación

$y = f(x)$; $x \in [a, b]$ gira alrededor del eje X , se genera una superficie de revolución, cuya área se calcula mediante:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Se le pide implementar un script que efectúe lo siguiente:

- Calcule el área exacta de la superficie de revolución usando la función integral de matlab, almacene su resultado en la variable **exacta**.
 - Use una cuadratura de Gauss de 10 puntos para encontrar el área y almacénelo en la variable **aproxCG**.
 - Con ayuda del método de Trapecio compuesto (50 subintervalos), encuentre el área aproximada y almacénela en la variable **aproxTC**.
 - Calcule el error relativo de cada una de las aproximaciones obtenidas en los ítems b) y c) y dar como respuesta la suma de ellas, almacenada en la variable **suma**.
4. Una varilla de material compuesto de longitud $L = 1$ m y masa $m = 0.5$ kg se calienta hasta 500°C . Luego se deja enfriar al medio ambiente, el cual se encuentra a 50°C . Además la varilla tiene una fuente de calor interna que varía con el tiempo de acuerdo con la siguiente función: $H(t) = H_0 \sin(\omega t)$ donde $H_0 = 200$ W es la potencia inicial de la fuente de calor, y $\omega = 0.5 \text{ rad s}^{-1}$ es la frecuencia angular de la variación de la fuente de calor. La ecuación diferencial ordinaria que describe este sistema incluye una pérdida de calor al ambiente proporcional a la diferencia de temperatura, y está dada por:

$$\frac{dT}{dt} = -\frac{hA}{mc}(T - T_a) + \frac{H(t)}{mc}$$

donde:

- $T_a = 50^\circ\text{C}$ es la temperatura ambiente.
- $h = 10 \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-1}$ es el coeficiente de transferencia de calor.
- $A = 0.01 \text{ m}^2$ es el área superficial de la varilla.
- $m = 0.5 \text{ kg}$ es la masa de la varilla.
- $c = 450 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ es la capacidad calorífica específica del material.

Se pide hallar la temperatura de la varilla transcurridos 60 segundos, para ello considere el intervalo $t \in [0, 60]$ asimismo considere una particion regular de $n = 20$ subintervalos.

- a) Use la función `dsolve` para resolver la ecuación diferencial en modo simbólico y luego calcule la temperatura de la varilla, almacene su respuesta (en double) en la variable `exacta`.
- b) Usando el método de Euler para estimar la temperatura de la varilla, asigne su respuesta a la variable `aproxEuler`.
- c) Estime la temperatura de la varilla utilizando el método de HEUN, almacene su respuesta en la variable `aproxH`.
- d) Halle la aproximacion de la temperatura utilizando el método de Runge Kutta de orden 4, almacene su respuesta en la variable `aproxRK4`.

5. El modelo matemático que describe el funcionamiento de los sistemas de amortiguamiento de elementos mecánicos está dado por:

$mx'' + kx + k_1x^3 = F_0 \cos \omega t$. Considere en particular el problema con valores iniciales:

$$\begin{cases} x'' + x + 0.2x^3 = 5 \cos t \\ x(0) = 1 \quad x'(0) = 0 \end{cases}$$

Estamos interesados en encontrar aproximadamente el valor de $x(2)$ y el valor de $x'(2)$, utilizando los métodos de Euler y Runge Kutta de orden 2 con tamaño de paso para ambos casos igual a $h = 0.1$, para ello:

- a) Almacene en la variable `solEuler` la solución obtenida para $x(2)$, por el método de Euler.
- b) Almacene en la variable `DsolEuler` la solución obtenida para $x'(2)$, por el método de Euler.
- c) Almacene en la variable `solRK2` la solución obtenida para $\frac{dx}{dt}(2)$, por el método de Runge Kutta de orden 2.
- d) Almacene en la variable `DsolRK2` la solución obtenida para $\frac{dx}{dt}(2)$, por el método de Runge Kutta de orden 2.