

EXAMEN DE LABORATORIO EL2 - TEO 3

Métodos Numéricos

7 de febrero de 2026

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 100 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- No hay reclamos, pues el examen está debidamente filtrado y validado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. El análisis y predicción de las propiedades de los materiales, como la viscosidad de los lubricantes es fundamental en la ingeniería para garantizar el rendimiento óptimo y la longevidad de la maquinaria industrial, especialmente en condiciones de temperatura variable. La viscosidad cinemática (μ_k) de un lubricante disminuye con el aumento de la temperatura, lo que afecta directamente su capacidad para reducir la fricción y el desgaste de los componentes.

Los métodos de aproximación numérica, como los **splines cúbicos naturales**, son herramientas efectivas para estimar la viscosidad en puntos de temperatura donde no se tienen observaciones directas, proporcionando una curva suave y físicamente coherente. Además, el cálculo de las derivadas de esta curva permite analizar la tasa de cambio de la viscosidad con la temperatura, lo cual es crucial para comprender el comportamiento del lubricante en rangos operativos dinámicos.

Supongamos que, en una aplicación industrial, se han recopilado las siguientes observaciones de la viscosidad cinemática (μ_k en $10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$) de un lubricante en función de la temperatura (T en $^{\circ}\text{C}$):

Cuadro 1: Datos de viscosidad cinemática vs. temperatura.

Temperatura (T) [$^{\circ}\text{C}$]	Viscosidad cinemática (μ_k) [$10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$]
0	1.79
21.1	1.13
37.8	0.696
54.4	0.519
71.1	0.338
87.8	0.321
100	0.296

Instrucciones

Realice lo indicado a continuación:

1. Obtener la matriz de coeficientes del spline.

- ▷ Invoque a la función `splinenatural` definida en la parte inferior de la plantilla a fin de encontrar la matriz S que almacena los coeficientes de los splines cúbicos naturales. La matriz S será de $(n-1) \times 4$, donde cada fila i contiene los coeficientes $[a_i, b_i, c_i, d_i]$ para el i -ésimo segmento del spline, de forma que el spline en ese segmento se expresa como:

$$s_i(x) = d_i + c_i(x - x_i) + b_i(x - x_i)^2 + a_i(x - x_i)^3$$

2. Graficar los datos iniciales.

- ▷ Grafique la nube de puntos (solo los puntos, sin unirlos con líneas o curvas) usando el comando `scatter` (o `plot`) con un marcador, como `'o'`, a fin de visualizar la dispersión de los datos observados. Asegúrese de etiquetar los ejes y añadir un título al gráfico.

3. Graficar los splines interpolados.

- ▷ Complete el bucle dado en la plantilla para graficar los splines (es decir, los segmentos de la curva interpolada). Para cada segmento del spline, genere un conjunto de puntos finos dentro de su intervalo y evalúe para obtener los valores correspondientes. Luego, trace estos puntos para mostrar la curva suave del spline.

4. **Evaluar la viscosidad en un punto específico.**

- ▷ Evalúe la viscosidad cinemática en la temperatura de 45°C y asigne el valor a la variable `muK_value`.

5. **Calcular la primera derivada del spline.**

- ▷ Encuentre la primera derivada del spline cúbico natural en la temperatura de 60°C y asigne el valor a la variable `muK_1DerValue`. Esto representa la tasa de cambio instantánea de la viscosidad con respecto a la temperatura en ese punto.

6. **Calcular la segunda derivada del spline.**

- ▷ Encuentre la segunda derivada del spline cúbico natural en la temperatura de 90°C y asigne el valor a la variable `muK_2DerValue`. Este valor indica la concavidad de la curva de viscosidad y la aceleración de su cambio.

2. El cálculo preciso del caudal de fluidos es fundamental en ingeniería (hidráulica, química y de procesos) para:

- Optimizar procesos
- Diseñar equipos
- Controlar inventarios
- Evaluar eficiencia energética de bombas

Cuando el caudal varía en el tiempo y se modela con una función matemática, la **integración numérica** permite determinar el volumen acumulado transferido.

Considere un escenario en una **planta de procesamiento petroquímico**, donde se monitorea el caudal $Q(t)$ (en m³/hora) de un producto químico a través de una línea de producción principal. A partir de datos operativos históricos, se ha desarrollado el siguiente modelo polinomial para describir el comportamiento del caudal durante un turno de 10 horas:

$$Q(t) = -\frac{11}{720}t^6 + \frac{71}{240}t^5 - \frac{271}{144}t^4 + \frac{75}{16}t^3 - \frac{1401}{360}t^2 - \frac{1}{15}t + 3 + 213.72$$

donde t es el tiempo en horas, en el intervalo de $t = 0$ a $t = 10$.

Procedimiento a Seguir

Realice lo indicado a continuación:

Paso 1: Cálculo del volumen exacto. El volumen total del producto químico (V) que fluyó a través de la línea durante el turno completo (de $t = 0$ a $t = 10$ horas) se obtiene integrando el caudal $Q(t)$ con respecto al tiempo. Para este polinomio, es posible obtener el valor exacto de la integral.

Calcule el valor exacto de la integral $\int_0^{10} Q(t)dt$ y asigne el resultado a la variable `volumenexacto`.

Paso 2: Aproximación con el Método del Trapecio Compuesto. Utilizando el método del trapecio compuesto (también conocido como regla trapezoidal compuesta), implementado con el comando `trapz` en MATLAB, halle una aproximación del volumen total que fluyó. Para asegurar la "mejor aproximación" posible con este método, utilice un número suficientemente grande de subintervalos (para este caso 1000 subintervalos). Asigne el valor resultante a la variable `volumentrap`.

Paso 3: Aproximación con el Método de Simpson (1/3). Utilizando el método de Simpson 1/3 con $N = 6$ subintervalos (lo que implica 7 puntos de datos, incluyendo los extremos), aproxime el volumen total del producto químico. Asigne el valor resultante a la variable `volumensimp`.

Paso 4: Aproximación con Cuadratura Gaussiana de 4 puntos. Utilizando la cuadratura Gaussiana de 4 puntos, aproxime el volumen total del producto químico que fluyó. Asigne el valor resultante a la variable `volumengauss`.

3. Se busca modelar la conductividad térmica relativa del sodio (k) en función de la temperatura (T), relevante en aplicaciones como intercambiadores de calor y reactores nucleares. Se cuenta con los siguientes datos experimentales y se requiere realizar un ajuste de modelo.

Datos Experimentales

Cuadro 2: Conductividad relativa del sodio a diferentes temperaturas.

Temperatura (T) ($^{\circ}\text{C}$)	Conductividad Relativa (k)
79	1.000
190	0.932
357	0.839
524	0.759
690	0.693

Tareas a Realizar

- **Ajustar un modelo cuadrático** $k(T) = a_2T^2 + a_1T + a_0$ mediante **mínimos cuadrados** para estimar los coeficientes a_0 , a_1 y a_2 . Asigne el coeficiente a_0 a la variable `A`.
- **Usar el modelo** para predecir k a 650°C . Asigne el valor a la variable `aprox1`.
- **Calcular el factor de determinación** R^2 para evaluar la precisión del ajuste. Asigne el valor a la variable `R2`.
- **Determinar si el modelo es adecuado** según el valor de R^2 . Si la respuesta es afirmativo asignar a la variable `op` el valor de 1, caso contrario asignar el valor 0.

Nota: Decimos que el modelo es adecuado si $R^2 > 0.95$.

4. Un paracaidista (sin paracaídas abierto inicialmente) cae libremente, considerando la gravedad y la resistencia del aire. La tasa de cambio de su velocidad vertical v , en función del tiempo t , está descrita por la siguiente Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO):

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{c_d}{m}v^2$$

donde los parámetros son:

- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ es la aceleración debido a la gravedad.
- $m = 68.1 \text{ kg}$ es la masa del paracaidista.
- $c_d = 0.25 \text{ kg/m}$ es el coeficiente de arrastre.
- $v(0) = 0 \text{ m/s}$ es la condición inicial (el paracaidista parte del reposo).

El objetivo es determinar la velocidad vertical del paracaidista en función del tiempo para $0 \leq t \leq 12$ segundos.

Tareas a Realizar

En un script, realice lo siguiente:

- Dada la solución exacta de la ecuación diferencial:

$$v(t) = \sqrt{\frac{gm}{c_d}} \tanh\left(\sqrt{\frac{gc_d}{m}}t\right)$$

Halle $v(12)$ y asigne la respuesta en la variable `v_exacta`.

- Halle la solución numérica de la EDO usando el **método de Euler** con un tamaño de paso $h = 2$ segundos. Aproxime $v(12)$ y asigne la respuesta en la variable `v_euler`.
- Halle la solución numérica de la EDO usando el **método de Runge-Kutta de segundo orden (Heun)** con un tamaño de paso $h = 2$ segundos. Aproxime $v(12)$ y asigne la respuesta en la variable `v_rk2`.
- Halle el **error absoluto** al aproximar $v(12)$ utilizando el método de Runge Kutta de orden 2. Almacene el resulta en la variable `v_error`.

5. Dada la información registrada:

Cuadro 3: Datos experimentales de $y(t)$.

t	0	0.5	1	1.5	2
y	0.1	0.62	<i>a</i>	1.65	0.52

Si el área bajo la curva $y = y(t)$, para $t \in [0, 2]$, y el eje de abcisas t es 2.1415.

Tareas a Realizar

Realice lo siguiente:

- Halle el valor aproximado del área con el **método de trapecio compuesto** con 4 intervalos considerando $a = 1.8$. Guarde el resultado en la variable **Itrapz**.
 - Halle el valor de a para que el área aproximada por el método del trapecio compuesto con 4 intervalos sea 2.1415. Guarde el resultado en la variable **Atrapz**.
 - Halle el valor aproximado del área con el **método de Romberg** de orden $\mathcal{O}(h^6)$ considerando $a = 1.8$. Guarde el resultado en la variable **Iromberg**.
-

Recordatorio: Método de Romberg

Recuerde las aproximaciones de método de Romberg:

	$k = 1; \mathcal{O}(h^2)$	$k = 2; \mathcal{O}(h^4)$	$k = 3; \mathcal{O}(h^6)$
$j = 1$	I_{11}	I_{12}	I_{13}
$j = 2$	I_{21}	I_{22}	
$j = 3$	I_{31}		

donde la fórmula recursiva es:

$$I_{j,k} = \frac{4^{k-1}}{4^{k-1} - 1} I_{j+1,k-1} - \frac{1}{4^{k-1} - 1} I_{j,k-1}, \quad \text{para } k > 1$$