

**Duración:** 90 minutos

**Fecha:** 07 de mayo de 2026

- 
- El examen consta de 4 problemas, cada uno con un valor de 5 puntos, sumando un total de 20 puntos.
  - Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
  - Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección, el número de la pregunta y el código ID de la pregunta. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
  - Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en la tarea de Examen Laboratorio 03 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
  - Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
  - El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
  - El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
  - Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
  - No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
  - Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

## Pregunta 1 - Velocidad de descarga en Tanque con Pérdidas (Prop. de Errores)

Una planta industrial necesita estimar la velocidad de salida de agua desde un tanque elevado hacia una tubería de descarga. El sistema presenta pérdidas de energía debido a la fricción en la tubería y a accesorios instalados, como válvulas y codos. Para modelar el fenómeno, se emplea una expresión obtenida a partir de la ecuación de Bernoulli considerando pérdidas distribuidas y locales.

El montaje experimental consta de:

- Un tanque con altura hidráulica disponible  $h$  (en m).
- Una tubería de descarga de longitud  $L$  (en m) y diámetro interno  $D$  (en m).
- Sensores para estimar el factor de fricción  $f$  (adimensional).
- Tablas experimentales para determinar el coeficiente de pérdidas locales  $K$  (adimensional).

Siendo el modelo matemático para calcular la velocidad de descarga  $v$  (en m/s),

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + K + \frac{fL}{D}}}$$

donde  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , y los valores medidos:

$$h = 8.5 \text{ m} \pm 0.03 \text{ m}$$

$$K = 2.4$$

$$f = 0.026$$

$$L = 35 \text{ m} \pm 1.5 \%$$

$$D = 0.12 \text{ m} \pm 0.008$$

**Realice lo siguiente:**

- Halle el valor aproximado de la velocidad de descarga  $v$ , almacene su respuesta en la variable `vvalue`.
- Halle la contribución del diámetro interno  $D$  en el cálculo del error absoluto al realizar la medición de  $v$ , almacene su respuesta en la variable `Dcontri`.
- Halle el error absoluto al realizar la medición de la magnitud  $v$ , almacene su respuesta en la variable `evalue`.
- Si el intervalo de la forma  $[a, b]$  es el intervalo de confianza para el valor verdadero de  $v$ , almacene dichos valores en el vector columna `confianza` =  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ .

## Pregunta 2 - Flujo en Tubería de Gas (Ecuaciones No Lineales)

Se considera el transporte de un gas a través de una **tubería larga** de diámetro interno  $D$  y longitud  $L$ , bajo condiciones de flujo permanente e isotérmico. Para modelar el efecto de la fricción y la compresibilidad del gas, se emplea una ecuación no lineal en términos de las presiones de entrada y salida.

El modelo matemático viene dado por:

$$P_1^2 - P_2^2 = \frac{G^2 RT}{M} \left[ \frac{fL}{D} + 2 \ln \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \right]$$

donde  $P_1$  es la presión de entrada,  $P_2$  es la presión de salida,  $G$  es el flujo másico por unidad de área,  $R$  es la constante universal de los gases,  $T$  es la temperatura absoluta,  $M$  es la masa molar del gas,  $f$  es el factor de fricción de Darcy,  $L$  es la longitud de la tubería y  $D$  es el diámetro interno.

Despejar explícitamente  $P_1$  no es posible debido a la presencia simultánea del término cuadrático  $P_1^2$  y del término logarítmico  $\ln(P_1/P_2)$ . Por ello, se define la función no lineal:

$$f(P_1) = P_1^2 - P_2^2 - \frac{G^2 RT}{M} \left[ \frac{fL}{D} + 2 \ln \left( \frac{P_1}{P_2} \right) \right]$$

Los valores numéricos de los parámetros son:

$$\begin{array}{ll} P_2 = 2.5 \times 10^5 \text{ Pa} & G = 8.5 \text{ kg}/(\text{m}^2\text{s}) \\ R = 8.314 \text{ J}/(\text{mol K}) & T = 288 \text{ K} \\ M = 0.016 \text{ kg/mol} & f = 0.018 \\ L = 1200 \text{ m} & D = 0.40 \text{ m} \end{array}$$

**Realice lo siguiente:**

- Utilice la función `fzero` para resolver la ecuación no lineal  $f(P_1) = 0$ . Use un valor semilla  $P_1^{(0)} = 3.0 \times 10^5$ , almacene el valor aproximado de la raíz  $P_1^*$  junto con el valor del residuo  $|f(P_1^*)|$  en el vector fila `fzero_results` =  $[P_1^* \quad |f(P_1^*)|]$ .
- Aplique el método de bisección para resolver la ecuación  $f(P_1) = 0$ . Use el intervalo  $[a, b] = [2.6 \times 10^5, 4.0 \times 10^5]$  y una tolerancia de  $10^{-6}$  en el error absoluto. Almacene el valor aproximado de la raíz  $P_1^*$  y el residuo final en el vector fila `bisection_results` =  $[P_1^* \quad |f(P_1^*)|]$ .
- Aplique el método de Newton para resolver la ecuación  $f(P_1) = 0$ , utilizando una semilla inicial igual al extremo  $b$  del intervalo del ítem anterior y modifique el código de la función `newton` para utilizar una tolerancia de  $10^{-6}$  en el **error absoluto**. Almacene el valor aproximado de la raíz  $P_1^*$  y el residuo final en el vector fila `newton_results` =  $[P_1^* \quad |f(P_1^*)|]$ .
- Luego de identificar el mejor método, es decir, aquel que produzca el menor residuo, use la correspondiente aproximación  $P_1^*$  para calcular la caída de presión:

$$\Delta P = P_1^* - P_2$$

y almacénela en la variable `caida`.

### Pregunta 3 - Sustentación y Arrastre (Sistema de Ec. No lineales)

En el análisis preliminar de un perfil aerodinámico se desea determinar la velocidad de vuelo  $v$  y el coeficiente de sustentación  $C_L$  a partir de mediciones experimentales de la fuerza de sustentación  $L$  y la fuerza de arrastre  $D$ . Se considera que el coeficiente de arrastre sigue una polar parabólica dependiente de  $C_L$ :

$$C_D = C_{D0} + kC_L^2$$

El sistema de ecuaciones no lineales es:

$$\begin{cases} F_1(v, C_L) = L - \frac{1}{2}\rho v^2 S C_L = 0 \\ F_2(v, C_L) = C_{D0} + kC_L^2 - \frac{2D}{\rho v^2 S} = 0 \end{cases}$$

Los valores numéricos de los parámetros son:

$$\begin{aligned} \rho &= 1.225 \text{ kg/m}^3 & S &= 16.2 \text{ m}^2 \\ L &= 9500 \text{ N} & D &= 850 \text{ N} \\ C_{D0} &= 0.025 & k &= 0.045 \end{aligned}$$

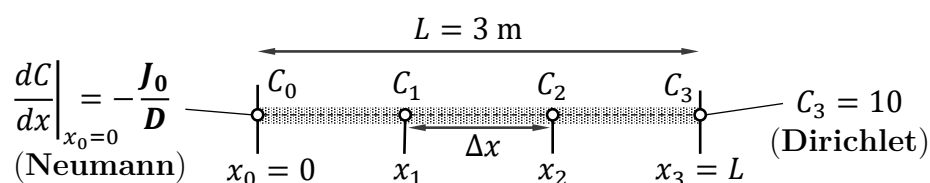
**Realice lo siguiente:**

- En un método gráfico se puede estimar la solución  $(v, C_L)$  usando una malla con espaciamiento 1 para  $v$  y 0.01 para  $C_L$ , usando  $v \in [10 : 1 : 30]$  m/s y  $C_L \in [1.20 : 0.01 : 1.80]$ . Use solo la información de la malla para obtener una raíz donde  $F\left(\begin{bmatrix} v \\ C_L \end{bmatrix}\right) \approx 0$ . Almacene la raíz en el vector columna  $\mathbf{x}_{\text{graf}} = \begin{bmatrix} v_{\text{graf}} \\ C_{L,\text{graf}} \end{bmatrix}$ . *Sugerencia: puede usar un doble bucle y la norma infinito ( $\|\cdot\|_\infty$ ) como criterio de proximidad a la raíz.*
- Aplice Newton matricial al sistema  $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix}$  con punto semilla  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 22 \\ 1.6 \end{bmatrix}$  y tolerancia  $1\text{e-}6$ . Guarde la solución en  $\mathbf{x}_{\text{sol}}$ .
- Halle el error relativo  $\delta$  que hay entre los resultados del ítem (1) y (2), considerando como valor verdadero a la estimación por el método de Newton. Almacene el valor en la variable **delta**.
- Analice la sensibilidad a la fuerza de arrastre resolviendo para  $D \in \{700, 800, 850, 950\}$  N con el mismo punto semilla y tolerancia del punto (2). Guarde las soluciones en  $\mathbf{x}_{\text{var}}$ , cuyas columnas son de la forma  $\begin{bmatrix} v \\ C_L \end{bmatrix}$ . Luego almacene el valor máximo de  $v$  y el valor mínimo de  $C_L$  en el vector columna  $\mathbf{x}_{\text{sen}} = \begin{bmatrix} v_{\text{máx}} \\ C_{L,\text{mín}} \end{bmatrix}$ . *Note que  $v_{\text{máx}} = \text{máx}(\mathbf{x}_{\text{var}}(1,:))$  y  $C_{L,\text{mín}} = \text{mín}(\mathbf{x}_{\text{var}}(2,:))$ .*

## Pregunta 4 - Transporte de Contaminante (Caso S.E.L.)

Considere la siguiente ecuación diferencial ordinaria que modela el **transporte unidimensional en estado estacionario de un contaminante en un medio** de longitud  $L = 3$  m. El contaminante se difunde en el medio, se degrada biológicamente a una tasa proporcional a su concentración y existe además una fuente volumétrica uniforme en todo el dominio. La concentración del contaminante se denota por  $C(x)$  y tiene unidades de  $\text{kg}/\text{m}^3$ .

|                                     |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $D \frac{d^2 C}{dx^2} - k_d C = -S$ | $D = 2 \quad \text{m}^2/\text{s}$ (coeficiente de difusión)<br>$k_d = 1 \quad \text{s}^{-1}$ (constante de decaimiento biológico)<br>$S = 5 \quad \text{kg}/(\text{m}^3 \cdot \text{s})$ (fuente volumétrica uniforme)<br>$J_0 = 4 \quad \text{kg}/(\text{m}^2 \cdot \text{s})$ (flujo másico impuesto) |
|-------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|



El gráfico muestra el dominio discretizado mediante **4 nodos** (incluyendo los nodos frontera), igualmente espaciados y ordenados en el intervalo  $0 \leq x \leq 3$  m ( $\Delta x = 1$  m). Además, se especifica una **frontera izquierda tipo Neumann** (flujo másico prescrito que ingresa al dominio) y una **frontera derecha tipo Dirichlet** (reservorio con concentración constante).

Se requiere estimar las concentraciones intermedias  $C_1$  y  $C_2$  considerando que la ecuación discretizada tiene la forma:

$$2C_{i-1} - 5C_i + 2C_{i+1} = -5$$

Con ello, el sistema se puede expresar en la forma matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  siguiente:

$$\begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 2 & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 - 2 \frac{J_0 \Delta x}{D} \\ n \end{bmatrix}$$

**Realice lo siguiente:**

- Defina los elementos  $a_{22}$  y  $b_2$ . Guarde los valores en el vector fila  $\mathbf{val} = [a_{22} \quad b_2]$ .
- Halle el **radio espectral** de la matriz **T** de **Jacobi** y **T** de **Gauss-Seidel** y determine si los esquemas iterativos correspondientes convergen. Guarde en la variable **conv**, una matriz que identifique la convergencia de cada método de la siguiente manera:  $\mathbf{conv} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{T}_J) & \text{OP}_J \\ \rho(\mathbf{T}_{GS}) & \text{OP}_{GS} \end{bmatrix}$ . Por ejemplo, si el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 (no converge) y el método de Gauss-Seidel tiene radio espectral de 0.8 (converge), entonces  $\mathbf{conv} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$ .
- Lleve a cabo el método de **Gauss-Seidel** con  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 4 \\ 8 \end{bmatrix}$  y una tolerancia de  $1\text{e-}5$ . Almacene la solución en el vector columna **xgs** y el número de iteraciones en **n\_gs**. En caso de no convergencia establezca **xgs** = 0 y **n\_gs** = 0.
- Si  $\mathbf{C}_3$  varía entre 5 : 0.5 : 20, almacene en la variable **xso1** las soluciones usando el método de **Jacobi** en la matriz **xtot** =  $[\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \dots \quad \mathbf{x}_n]$ , donde cada columna es la solución aproximada según la variación de  $\mathbf{C}_3$  en el rango dado. Considere el mismo punto semilla y tolerancia del ítem anterior.