

## EXAMEN DE LABORATORIO EL1

Métodos Numéricos

4 de octubre del 2025

---

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 90 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 7 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

## 1. Propagación de errores - Caudal a través de un orificio circular

El caudal volumétrico de un líquido que descarga a través de un orificio bajo carga estática se modela por:

$$Q = 1000 \cdot C_d \frac{\pi}{4} D^2 \sqrt{2g\Delta h}$$

donde  $Q$  es el caudal en litros por segundo (L/s),  $C_d$  es el coeficiente de descarga (adimensional),  $D$  es el diámetro del orificio (m),  $g$  es la aceleración de la gravedad ( $\text{m/s}^2$ ) y  $\Delta h$  es la diferencia de carga piezométrica (m).

**Considerando los valores:**

- $C_d = 0.620 \pm 0.010$  (error absoluto).
- $D = 0.102 \text{ m} \pm 0.010$ .
- $\Delta h = 1.250 \text{ m} \pm 0.8 \%$ .
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$  (valor fijo).

**Tareas:**

- a) Estime el caudal nominal **Q** y guárdelo en `Qest_Lps`.
- b) Usando la ecuación, estime el error absoluto  $\Delta Q$  (en L/s) y el error relativo porcentual de **Q**. Guarde en `errAbs_Q_Lps` y `errRelPct_Q`, respectivamente.
- c) Determine el porcentaje de contribución de cada variable  $C_d$ ,  $D$ ,  $\Delta h$  al error relativo total de **Q** y almacénelos en `contri = [pct_Cd, pct_D, pct_dh]`.

*Nota: **contri** es un vector fila y la suma de sus elementos debe ser 100 %.*

## 2. Ecuaciones No Lineales - Cálculo del ángulo de choque $\beta$ a partir de la relación $\theta - M$

En el estudio de ondas de choque oblicuas, el ángulo de deflexión  $\theta$  está relacionado con el ángulo de choque  $\beta$  y el número de Mach  $M_1$  mediante:

$$\tan(\theta) = 2 \cot(\beta) \cdot \frac{M_1^2 \sin^2(\beta) - 1}{M_1^2(\gamma + \cos(2\beta)) + 2}$$

Donde  $\theta$  es el ángulo de deflexión (rad),  $\beta$  es el ángulo de choque (rad),  $M_1$  es el número de Mach aguas arriba y  $\gamma$  es la razón de calores específicos del gas.

**Considere los valores:**

- $\theta = 25^\circ$  (convierta a radianes para los cálculos).
- $M_1 = 3$ .
- $\gamma = 1.4$ .

Se desea determinar  $\beta$  (en grados sexagesimales) que satisface la ecuación anterior. Realice lo siguiente:

- a) Formule la función no lineal y represente **gráficamente**  $f(\beta)$  en el intervalo  $\beta \in [10^\circ, 60^\circ]$  usando 1000 puntos uniformemente distribuidos. A partir de la gráfica, determine un valor aproximado de  $\beta$  y guárdelo en **bgrf**.
- b) Aplique método de **bisección** en un intervalo  $[10^\circ, 60^\circ]$  con tolerancia  $1e-6$ . Almacene en un vector columna **bb1sec** el valor de  $\beta$  en cada iteración, el último valor debe ser la mejor estimación de la raíz.
- c) Resuelva el mismo problema con el método de **Newton-Raphson** (tolerancia  $1e-6$ ), usando como punto inicial el extremo del intervalo (**en radianes**) del ítem (2) que esté más alejado de la raíz estimada gráficamente. Almacene en un vector columna **bnewton** el valor de  $\beta$  en cada iteración, el último valor debe ser la mejor estimación final.

### 3. Sistema de Ecuaciones No Lineales - Calor Transferido en un Intercambiador de Calor

En un intercambiador de calor de tubos se conoce que el calor transferido depende tanto del caudal volumétrico  $Q_v$  como del coeficiente global de transferencia  $U$ . El comportamiento del sistema se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} F_1(Q_v, U) = Q_h - UA \ln \left( 1 + \frac{Q_v}{Q_0} \right) = 0 \\ F_2(Q_v, U) = U - \left( U_0 + k_1 \frac{\nu}{Q_v D} + k_2 \left( \frac{Q_v}{Q_0} \right)^{1/2} \right) = 0 \end{cases}$$

Donde:

- $Q_v$ : caudal volumétrico del fluido ( $\text{m}^3/\text{s}$ ).
- $U$ : coeficiente global de transferencia de calor ( $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ ).
- $Q_h = 15\,000\text{ W}$ : flujo de calor transferido.
- $A = 25\text{ m}^2$ : área de transferencia.
- $Q_0 = 0.002\text{ m}^3/\text{s}$ : caudal de referencia.
- $D = 0.05\text{ m}$ : diámetro del tubo.
- $\nu = 1 \times 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ : viscosidad cinemática.
- $U_0 = 500$ ,  $k_1 = 1200$ ,  $k_2 = 10$ : constantes empíricas.

Tareas:

- a) En un método gráfico se puede estimar la solución  $(Q_v, U)$  usando una malla con espaciamiento 0.01 en ambas variables, usando  $Q_v \in [0.001 : 0.001 : 0.010]\text{ m}^3/\text{s}$  y  $U \in [400 : 10 : 600]$ . Use solo la información de la malla para obtener una raíz donde  $F \left( \begin{bmatrix} Q_v \\ U \end{bmatrix} \right) \approx 0$ . Almacene la raíz en  $\mathbf{xgraf} = \begin{bmatrix} Q_{v\text{graf}} \\ U_{\text{graf}} \end{bmatrix}$ .  
*Sugerencia: puede usar un doble bucle y la norma infinito ( $\|\cdot\|_\infty$ ) como criterio de proximidad a la raíz.*
- b) Aplique Newton matricial al sistema  $\mathbf{F} = [F_1, F_2]^T$  con punto semilla  $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.001 \\ 400 \end{bmatrix}$  y tolerancia  $1\text{e-}6$ . Guarde la solución en  $\mathbf{xsol}$ .
- c) Halle el error relativo  $\delta$  que hay entre los resultados del ítem (1) y (2), considerando como valor verdadero a la estimación por el método de Newton. Almacene el valor en la variable **delta**.
- d) Analice la sensibilidad a  $Q_h$  resolviendo para  $Q_h \in \{12\,000, 15\,000, 18\,000, 21\,000\}\text{ W}$  con el mismo punto semilla y tolerancia del punto (2). Guarde las soluciones en  $\mathbf{xvar}$  (columnas  $\begin{bmatrix} Q_v \\ U \end{bmatrix}$ ). Luego almacene el valor máximo de  $Q_v$  y el valor mínimo de  $U$  en la variable  $\mathbf{xsen} = \begin{bmatrix} Q_{v\text{máx}} \\ U_{\text{mín}} \end{bmatrix}$ .  
*Note que  $Q_{v\text{máx}} = \text{máx}(\mathbf{xvar}(1, :))$  y  $U_{\text{mín}} = \text{mín}(\mathbf{xvar}(2, :))$ .*

#### 4. Métodos Iterativos

Considere el sistema de ecuaciones lineales parametrizado por  $c$  (entero) :

$$A\mathbf{x} = b, \quad \text{donde } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & c \\ -1 & 3 & -1 \\ c & -1 & 5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Realice lo siguiente:

- a) Determine los valores de  $c$  (entero) para los cuales la matriz  $A$  es diagonal estrictamente dominante. Almacene estos valores en orden ascendente en la variable `n_dom`. Nota: `n_dom` es un vector fila.

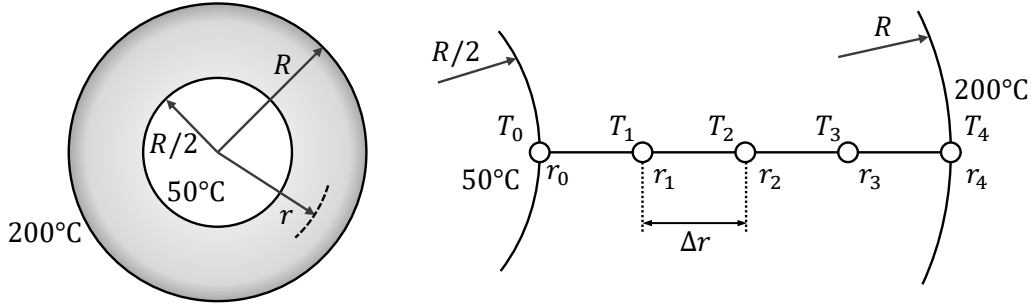
- b) Implemente el método de Jacobi con tolerancia `1e-6` y un punto semilla de  $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ .

Almacene en la matriz `xsol` las aproximaciones de la solución para los valores de  $c = -10 : 1 : 20$ , colocando en cada columna el vector solución obtenido. Nota: Verifique el uso de la norma infinito ( $\|\cdot\|_\infty$ ) para el cálculo del error relativo.

- c) Para los mismos valores de  $c = -10 : 1 : 20$ , determine qué valor de  $c$  entrega el menor error relativo en la última iteración del ítem 2 y almacene en la variable `bestC`.

## 5. Caso SEL - Distribución de Temperatura en un Cilindro

En el lado izquierdo de la figura siguiente se muestra un cilindro grueso de radio interno  $R/2$  y radio externo  $R$  que está en contacto con un fluido que mantiene su superficie interna a una temperatura de  $50^\circ\text{C}$ , mientras que su superficie externa está a  $200^\circ\text{C}$ .



La ecuación diferencial que describe el perfil de temperatura estacionaria en el cilindro, junto con las condiciones de frontera, está dada por:

$$\frac{d^2 T}{dr^2} = -\frac{1}{r} \frac{dT}{dr} \quad , \quad T\left(\frac{R}{2}\right) = 50^\circ\text{C}, \quad T(R) = 200^\circ\text{C}$$

Se requiere estimar las temperaturas intermedias  $T_1, T_2$  y  $T_3$  considerando que  $R/2 = 0.4$  m,  $R = 0.8$  m y  $\Delta r = 0.1$  m y que la ecuación discretizada tiene la forma:

$$\left(1 - \frac{\Delta r}{r_i}\right) T_{i-1} + \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_i}\right) T_i + T_{i+1} = 0$$

Con ello, el sistema se puede expresar en la forma matricial  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  siguiente:

$$\begin{bmatrix} \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_1}\right) & 1 & 0 \\ \left(1 - \frac{\Delta r}{r_2}\right) & \left(-2 + \frac{\Delta r}{r_2}\right) & 1 \\ 0 & \left(1 - \frac{\Delta r}{r_3}\right) & m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{T_0 \Delta r}{r_1} - T_0 \\ 0 \\ n \end{bmatrix}$$

### Tareas:

- Defina los elementos  $a_{22}, b_1$ . Guarde los valores en  $\mathbf{val} = [a_{22}, b_1]$ .
- Halle el **radio espectral** de la matriz  $\mathbf{T}$  de **Jacobi** y  $\mathbf{T}$  de **Gauss-Seidel** y determine si los esquemas iterativos correspondientes convergen. Guarde en la variable **conv**, una matriz que identifique la convergencia de cada método de la siguiente manera:  $\mathbf{conv} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{T}_J) & \text{OP}_J \\ \rho(\mathbf{T}_{GS}) & \text{OP}_{GS} \end{bmatrix}$ . Por ejemplo, si el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 (no converge) y el método de Gauss-Seidel tiene radio espectral de 0.8 (converge), entonces  $\mathbf{conv} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$ .
- Lleve a cabo el método de **Gauss-Seidel** con  $\mathbf{x}^{(0)} = [75 \ 125 \ 175]^T$  y una tolerancia de  $1e-6$ . Almacene la solución en el vector columna **xgs** y el número de iteraciones en **n\_gs**. En caso de no convergencia establezca **xgs** = 0 y **n\_gs** = 0.
- Si  $\mathbf{T}_4$  varía entre 100 : 20 : 300, almacene en la variable **xso1** las soluciones usando el método de **Jacobi** en la matriz  $\mathbf{xtot} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$ , donde cada columna es la solución aproximada según la variación de  $\mathbf{T}_4$  en el rango dado. Considere el mismo punto semilla y tolerancia del ítem anterior.