

EXAMEN DE LABORATORIO EL1 - TEO 8

Métodos Numéricos

03 de octubre de 2025

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 100 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 4 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. En un estudio de propagación de ondas sísmicas, la **amplitud máxima registrada** (A_r , en μm) en un sismómetro se modela mediante la siguiente ecuación, que depende de:

- La **distancia epicentral** r (en km),
- El **ángulo de incidencia de la onda** α (en rad),
- El **tiempo de viaje de la onda** T (en s):

$$A_r = \frac{e^{-\beta r}}{T^{1.5}} \cdot \tan(\alpha)$$

Parámetros conocidos

- $\beta = 0.03$ (coeficiente de atenuación sísmica, en km^{-1}),
- $r = 50 \pm 0.3$ km,
- $\alpha = 0.5$ rad con una incertidumbre porcentual del **0.15 %**,
- $T = 25 \pm 0.4$ s.

Se pide

- Calcular el **valor estimado** de A_r y almacenarlo en la variable `v_ar`.
- Determinar el **error absoluto** que contribuye cada variable (r , α , T) a la incertidumbre de A_r . Guardar estos valores en el **vector fila numérico contribuciones** (orden: r , α , T).
- Calcular el **error total** de A_r y almacenarlo en la variable `er_ar`.

Notas para MATLAB Grader

- Usar **propagación de incertidumbres** (derivadas parciales) para calcular las contribuciones.
- El error de α debe calcularse primero como valor absoluto a partir de su incertidumbre porcentual.

2. En el estudio de **lentes gravitacionales extremas** cerca de un agujero negro de Kerr, el **ángulo de deflexión total** θ de un fotón con parámetro de impacto b (en unidades de M) se modela mediante una ecuación que incluye efectos de gravedad cuántica y rotación:

$$\theta(b) = \frac{4GM}{c^2b} + \gamma \left(\frac{GM}{c^2b} \right)^2 - \delta \exp \left(-\frac{b}{b_0} \right) \sin \left(\frac{2\pi b}{b_0} \right)$$

Parámetros del sistema

- $GM/c^2 = 1$ (unidades geometrizadas),
- $\gamma = 0.15$ (corrección por rotación),
- $\delta = 0.3$ (correcciones cuánticas),
- $b_0 = 3\sqrt{3} \approx 5.196$ (parámetro crítico),
- Condición a resolver: $\theta(b) = 1.5 \cdot \frac{4GM}{c^2b}$.

Problema

Encuentre el parámetro de impacto b para el cual el ángulo de deflexión es 1.5 veces el ángulo clásico de Einstein.

Requisitos

- a) Defina la función $f(b)$ cuya raíz resuelva el problema. Evalúe $|f(5.0)|$ y almacene el resultado en `nvalue`.
- b) Aproxime b con tolerancia $1e-3$ usando **Newton-Raphson** (valor inicial $b = 4.5$). Almacene el resultado en `bapprox_newton`.
- c) Aproxime b con tolerancia $1e-3$ usando **bisección** en $[3.0, 6.0]$. Almacene el resultado en `bapprox_bisection`.
- d) Almacene las iteraciones usadas en `iter_newton` y `iter_bisection`.

3. Durante el análisis de encuentros entre trayectorias, se modelan las órbitas aproximadas por cónicas en el plano. Consideremos la intersección simultánea de tres cónicas que representan aproximaciones a las trayectorias (una elipse, una hipérbola rotada y una parábola). Se busca el punto de intersección (x, y) y el ángulo de rotación φ de la hipérbola que satisfacen el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{cases} f_1(x, y, \varphi) = \frac{(x \cos \theta_1 + y \sin \theta_1)^2}{a_1^2} + \frac{(-x \sin \theta_1 + y \cos \theta_1)^2}{b_1^2} - 1 = 0, \\ f_2(x, y, \varphi) = \frac{(x \cos \varphi + y \sin \varphi)^2}{a_2^2} - \frac{(-x \sin \varphi + y \cos \varphi)^2}{b_2^2} - 1 = 0, \\ f_3(x, y, \varphi) = y - (p(x - h)^2 + k) = 0. \end{cases}$$

Las incógnitas son x , y , φ (nota: φ en radianes). Los parámetros conocidos son:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1.6, & b_1 &= 0.9, & \theta_1 &= 0.25 \text{ rad}, \\ a_2 &= 1.1, & b_2 &= 0.7, \\ p &= 0.8, & h &= 0.2, & k &= 0.05. \end{aligned}$$

a) **Planteo vectorial.** Plantee el vector de funciones

$$F(x, y, \varphi) = \begin{bmatrix} f_1(x, y, \varphi) \\ f_2(x, y, \varphi) \\ f_3(x, y, \varphi) \end{bmatrix}.$$

Luego, realice una búsqueda exhaustiva por rejilla: haga variar x , y , φ en el intervalo $[0.5, 2.5]$ con incremento 0.01. Para cada triple (x, y, φ) evalúe las tres funciones y calcule la norma euclídea del vector residual $\|F(x, y, \varphi)\|_2$. Determine la mejor combinación (x^*, y^*, φ^*) que minimiza $\|F\|_2$. Almacene esa solución aproximada en el vector columna

$$\text{sol_aprox1} = \begin{bmatrix} x^* \\ y^* \\ \varphi^* \end{bmatrix}.$$

b) **Método de Newton matricial: 10 iteraciones.** Implemente el método de Newton para sistemas:

$$J(X^{(k)}) \Delta X^{(k)} = -F(X^{(k)}), \quad X^{(k+1)} = X^{(k)} + \Delta X^{(k)},$$

con $X^{(k)} = [x^{(k)} \ y^{(k)} \ \varphi^{(k)}]^T$. Use exactamente 10 iteraciones partiendo desde el punto semilla

$$X^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Construya la matriz

$$\text{sol_aprox} = [x^{(k)} \ y^{(k)} \ \varphi^{(k)}]_{k=0}^9,$$

donde cada fila corresponde a los valores de las variables en la iteración k .

- c) **Método de Newton con tolerancia** 10^{-6} . Ejecute nuevamente el método de Newton, con el mismo punto semilla $[1 \ 1 \ 1]^T$, hasta que se cumpla $\|F(X^{(k)})\|_2 < 10^{-6}$ o $\|\Delta X^{(k)}\|_\infty < 10^{-6}$. Al finalizar, almacene los últimos valores en el vector fila

$$\text{sol_aprox_tol} = [x^{(\text{last})} \ y^{(\text{last})} \ \varphi^{(\text{last})}],$$

donde cada escalar representa la mejor estimación de la raíz.

4. Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales que depende del parámetro m :

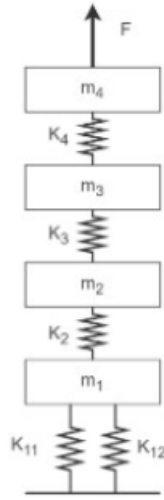
$$\begin{cases} 8x_1 + 2x_2 - mx_3 = 6 \\ -2x_1 + (4 + m)x_2 + 2x_3 = 7 \\ mx_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \end{cases}$$

El parámetro m toma valores enteros en el rango $[-3, 13]$ con incrementos de 1.

Realice lo siguiente:

- a) Determine el número de valores de m en los que **no converge** el método de Jacobi. Guarde este resultado en la variable `num_noconverge`.
- b) Para los casos en los que **sí hay convergencia**, aplique el método de Jacobi utilizando como punto inicial $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ con una tolerancia de 10^{-5} . Guarde las soluciones en la matriz `xsol`, donde cada columna representa la solución correspondiente a un valor de m .
- c) Guarde el número de iteraciones requeridas por el método de Jacobi en cada caso en el vector columna `niterv`.

5. Considere el siguiente sistema de masa resorte:



El cual puede modelarse utilizando las leyes de la mecánica, obteniendo un sistema de ecuaciones lineales con 4 incógnitas correspondientes a los desplazamientos: x_1, x_2, x_3, x_4 .

Este sistema se puede expresar en la forma matricial $Ax = b$ como sigue:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & -K_3 & 0 & 0 \\ -K_2 & (K_2 + K_3) & -K_3 & 0 \\ 0 & -K_3 & (K_3 + K_4) & -K_4 \\ 0 & 0 & -K_4 & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1g \\ -m_2g \\ -m_3g \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Donde los valores de las masas son: $m_1 = 1 \text{ kg}$, $m_2 = 1 \text{ kg}$, $m_3 = 1 \text{ kg}$, $m_4 = 1 \text{ kg}$.

Los valores de los coeficientes de resortes son: $K_1 = 100 \text{ Nm}$, $K_2 = 100 \text{ Nm}$, $K_3 = 100 \text{ Nm}$, $K_4 = 100 \text{ Nm}$.

La fuerza aplicada es $F = 100 \text{ N}$, y la aceleración debido a la gravedad es $g = 9.81 \text{ m/s}^2$.

Realice lo siguiente:

- Defina los elementos a_{11}, a_{44} y b_4 . Guarde los valores en `val = [a11 a44 b4]`. Luego almacene la matriz A en la variable `A` y el vector b en la variable `b`.
- Determine el **radio espectral** de la matriz T de Jacobi y T de Gauss-Seidel y almacene los valores en `rhoTJ` y `rhoTGS`, respectivamente. Guarde en la variable `conv`, una matriz que identifique la convergencia de cada método. Ejemplo: `conv = [1.2 0.8]` significa que el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 y cero indica que no converge dicho método, asimismo 0.8 es el valor del radio espectral usando el método de Gauss-Seidel y 1 significa que dicho método converge.
- Lleve a cabo el **método de Gauss-Seidel** con $x^{(0)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1]^T$ y una tolerancia de 1×10^{-5} . Almacene la raíz en la variable `xgs` y el número de iteraciones en `ngs`. En caso de no convergencia establezca `xgs = 0` y `ngs = 0`.
- Si K_2 varía entre 80 : 5 : 120, almacene en la variable `xtot` las raíces usando el método de Jacobi en la matriz $X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_4]$.