

EXAMEN DE LABORATORIO EL1

Métodos Numéricos

6 de octubre de 2025

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 90 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 7 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. Propagación de Errores - Límite de velocidad en curva peraltada con fricción

Para un vehículo que toma una curva de radio r con peralte θ y fricción estática neumático-pavimento μ , la **velocidad máxima sin deslizamiento** se modela por:

$$v_{\max} = \sqrt{gr \frac{\sin \theta + \mu \cos \theta}{\cos \theta - \mu \sin \theta}}$$

Donde $v_{\max}$ (m/s) es la velocidad límite, g (m/s²) es la gravedad, r (m) es el radio de la curva, θ (rad) es el ángulo de peralte, μ (adimensional) es el coeficiente de fricción estática.

Considerando los valores:

- $r = 152 \text{ m} \pm 0.0033$
- $\theta = 12^\circ \pm 2.5 \%$ (expresé θ en radianes para los cálculos)
- $\mu = 0.35 \pm 0.02$ (error absoluto)
- $g = 9.81 \text{ m/s}^2$

Realice lo siguiente:

- a) Estime $v_{\max}$ con los valores nominales y guárdelo en `vmax_est`.
- b) Usando la ecuación, estime el error absoluto $\Delta v_{\max}$ y el error relativo porcentual de $v_{\max}$ empleando reglas de propagación. Guarde en `errAbs_v` y `errRelPct_v`.
- c) Determine el porcentaje de contribución del error de cada variable r, θ, μ al error absoluto de $v_{\max}$ y almacénelos en `contri = [pct_r, pct_theta, pct_mu]`. **Nota:** `contri` es un vector fila y la suma de sus elementos debe ser 100 %.

2. Ecuaciones No Lineales - Número de Mach en una tobera convergente-divergente

En el análisis de flujos compresibles en toberas, la relación entre el área de la sección transversal A , el área en garganta A^* , el número de Mach M y la razón de calores específicos γ se expresa mediante la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{A}{A^*} = \frac{1}{M} \left[\frac{2}{\gamma + 1} \left(1 + \frac{\gamma - 1}{2} M^2 \right) \right]^{\frac{\gamma + 1}{2(\gamma - 1)}}$$

Considere que $\gamma = 1.4$, el área adimensional deseada es $\frac{A}{A^*} = 1.80$, y se busca determinar el número de Mach subsónico M que satisface la ecuación.

Realice lo siguiente:

- En un método gráfico se puede estimar el valor de M usando una malla de 1000 puntos uniformemente distribuidos en el intervalo $M \in [0.20, 0.95]$. Use la información del vector M para obtener una raíz aproximada de la ecuación no lineal planteada. Almacene el valor estimado en la variable **Mgraf**.
- Aplique el **método de bisección** en el intervalo $[0.20, 0.95]$ con un máximo de 50 iteraciones. Almacene en un vector columna **Mbisec** el valor de M en cada iteración; el último valor debe ser la mejor estimación de la raíz.
- Resuelva el mismo problema con el **método de Newton-Raphson** (tolerancia 10^{-6}), usando como punto inicial el extremo del intervalo del ítem (2) que esté más cercano de la raíz estimada gráficamente. Almacene en un vector columna **Mnewton** el valor de M en cada iteración; el último valor debe ser la mejor estimación final.

3. Sistema de Ecuaciones No Lineales - Circuito con dos diodos no lineales

En el circuito mostrado se desea determinar la corriente total I que circula por la resistencia y la tensión V en los bornes de los diodos. El comportamiento de cada diodo sigue la ecuación de Shockley. Aplicando las leyes de Kirchhoff se obtiene el siguiente sistema no lineal:

$$F_1(I, V) = I - I_{s1} \left(e^{\frac{V}{n_1 V_T}} - 1 \right) - I_{s2} \left(e^{\frac{V}{n_2 V_T}} - 1 \right) = 0$$
$$F_2(I, V) = V_s - RI - V = 0$$

donde:

- $V_s = 5 \text{ V}$
- $R = 100 \Omega$
- $I_{s1} = 1 \times 10^{-12} \text{ A}$, $n_1 = 1$
- $I_{s2} = 5 \times 10^{-12} \text{ A}$, $n_2 = 2$
- $V_T = 0.025 \text{ V}$

Realice lo siguiente:

- a) En un método gráfico se puede estimar la solución (I, V) usando una malla con espaciado razonable en ambas variables, por ejemplo $I = 0 : 0.001 : 0.05 \text{ A}$ y $V = 0 : 0.01 : 1 \text{ V}$. Use solo la información de la malla para obtener una raíz donde $F([I, V]^T) \approx 0$. Almacene la raíz en `xgraf = [Igraf; Vgraf]`.
- b) Aplique Newton matricial al sistema $F = [F_1; F_2]$ con punto semilla $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.01 \\ 0.7 \end{bmatrix}$ y tolerancia 10^{-6} . Guarde la solución en `xsol`.
- c) Halle el error relativo δ que hay entre los resultados del ítem (1) y (2), considerando como valor verdadero a la estimación por el método de Newton. Almacene el valor en la variable `delta`.
- d) Analice la sensibilidad a la fuente de tensión resolviendo para $V_s \in \{4.5, 5.0, 5.5\} \text{ V}$ con el mismo punto semilla y tolerancia del punto (2). Guarde las soluciones en `xvar` (columnas). Luego almacene el valor máximo de I y el valor mínimo de V en la variable `xsen = [Imax; Vmin]`.

4. Sistema de Ecuaciones Lineales con Parámetro Variable

Considere el siguiente sistema de ecuaciones lineales parametrizado por p (entero):

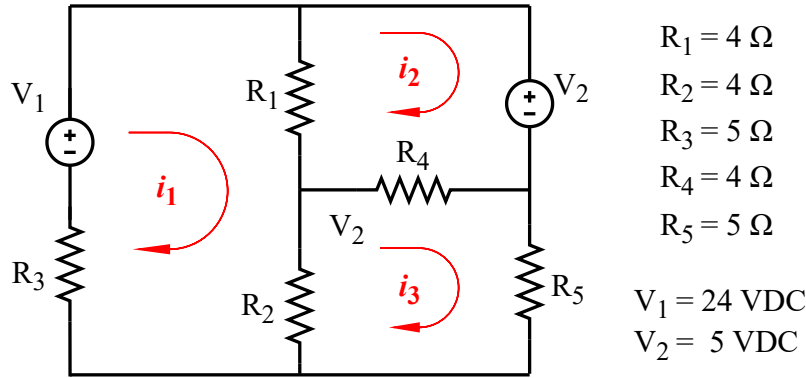
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \quad \text{donde} \quad A = \begin{bmatrix} 6 & -1 & 2 \\ -2 & 5 & -p \\ 1 & -p & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ p \\ 3 \end{bmatrix}$$

Realice lo siguiente:

- a) Determine los valores de p (entero) para los cuales la matriz A es diagonal estrictamente dominante. Almacene estos valores en orden ascendente en la variable `n_dom`. **Nota:** `n_dom` es un vector fila.
- b) Implemente el método de Gauss-Seidel con tolerancia `1e-8` con un punto semilla de $x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$. Almacene en la matriz `xsol` las aproximaciones de la solución para los valores de $p = -5 : 1 : 10$, colocando en cada columna el vector solución obtenido. **Nota:** Verifique el uso de la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$) para el cálculo del error relativo.
- c) Para los mismos valores de $p = -5 : 1 : 10$, determine qué valor de p entrega el mayor error relativo en la última iteración del ítem 2 y almacene en la variable `worstP`.

5. Caso SEL - Circuito Eléctrico en Estado Estacionario

Se presenta el siguiente circuito donde se debe determinar las corrientes indicadas.



Dicho sistema puede ser modelado con las leyes de Kirchhoff para obtener un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas correspondientes a las corrientes i_1 , i_2 e i_3 .

El sistema se puede expresar en la forma matricial $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ siguiente:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3) & -R_1 & -R_2 \\ R_1 & a_{22} & R_4 \\ -R_2 & R_4 & (R_2 + R_4 + R_5) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con estos valores se puede parcialmente el sistema en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 13 & -4 & -4 \\ 4 & a_{22} & 4 \\ -4 & -4 & 13 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Realice lo siguiente:

- Defina los elementos a_{22} , b_2 . Guarde los valores en **val** = $[a_{22} \ b_2]$. Luego almacene la matriz A en la variable **A** y el vector b en la variable **b**.
- Halle el radio espectral de la matriz T de Jacobi y T de Gauss-Seidel y determine si los esquemas iterativos correspondientes convergen. Guarde en la variable **conv** una matriz que identifique la convergencia de cada método de la siguiente manera $\text{conv} = \begin{bmatrix} \rho_j & OP_j \\ \rho_{gs} & OP_{gs} \end{bmatrix}$. Por ejemplo, si el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 (no converge) y el método de Gauss-Seidel tiene radio espectral de 0.8 (converge), entonces $\text{conv} = \begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$.
- Lleve a cabo el método de Jacobi con $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 1 \ 1]^T$ y una tolerancia de $1\text{e-}5$. Almacene la solución en el vector columna **xjac** y el número de iteraciones en **njac**. En caso de no convergencia, establezca **xjac** = 0 y **njac** = 0.
- Si R_1 varía entre 1:1:20, almacene en la variable **xtot** las soluciones que converjan usando el método de **Jacobi** en la forma de matriz $\text{xtot} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$ donde cada columna es la solución aproximada según la variación de R_1 en el rango dado. Considere el mismo punto semilla y tolerancia del ítem anterior.