

## EXAMEN DE LABORATORIO EL1

Métodos Numéricos

30 de septiembre de 2025

---

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 90 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 7 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

## 1. Estimación de la viscosidad (ley de Poiseuille)

En un experimento de flujo laminar en tubería, se estima la viscosidad dinámica  $\mu$  con el modelo:

$$\mu(P, D, L) = \frac{PD^2}{32\nu L},$$

donde:

- $P$ : es la caída de presión a lo largo de un tramo de longitud  $L$ .
- $D$ : es el diámetro interno del tubo y
- $\nu$ : es la velocidad media del flujo (parámetro conocido en este montaje).

Cada magnitud medida presenta una incertidumbre absoluta.

**Modelo matemático (con  $\nu$  conocido):**

$$\mu(P, D, L) = \frac{PD^2}{32\nu L} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial P} = \frac{D^2}{32\nu L} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial D} = \frac{2PD}{32\nu L} \quad , \quad \frac{\partial \mu}{\partial L} = -\frac{PD^2}{32\nu L^2}$$

**Propagación de errores**

$$\sigma_\mu \approx \left| \frac{\partial \mu}{\partial P} \right| \Delta P + \left| \frac{\partial \mu}{\partial D} \right| \Delta D + \left| \frac{\partial \mu}{\partial L} \right| \Delta L$$

**Parámetros nominales y errores (SI):**

- $P_n = 1200 \text{ Pa}$ ,  $\Delta P = 50 \text{ Pa}$
- $D_n = 5.0 \times 10^{-4} \text{ m}$ ,  $\Delta D = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m}$
- $L_n = 0.8 \text{ m}$ ,  $\Delta L = 0.01 \text{ m}$
- $\nu = 0.02 \text{ m/s}$  (conocida).

**Objetivo:** Calcular el valor nominal de  $\mu(P_n, D_n, L_n)$ , la incertidumbre lineal  $\sigma_\mu$  y la incertidumbre relativa  $\sigma_\mu/\mu$ .

**Indicaciones operativas:**

- Defina  $\mu(P, D, L) = \frac{PD^2}{32\nu L}$  (con  $\nu$  fijo) y evalúe  $\mu(P_n, D_n, L_n)$ , luego almacene el resultado en `uvalue`.
- Aproxime la incertidumbre  $\sigma_\mu$  y almacene el resultado en `err_abs`.
- Aproxime la incertidumbre relativa  $\frac{\sigma_\mu}{\mu}$  y almacene el resultado en `err_rel`.
- Calcule la contribución porcentual de cada variable ( $P, D, L$ ) a la incertidumbre absoluta total  $\sigma_\mu$ . La contribución porcentual se define como:

$$\text{Contribución de } X = \frac{\left| \frac{\partial \mu}{\partial X} \right| \Delta X}{\sigma_\mu} \times 100$$

(sin incluir el símbolo % en la respuesta numérica). Almacene en `error_contribucion` el valor numérico de la contribución porcentual de la variable que menos influye en el error final de  $\mu$ .

## 2. Intersección de curva trascendental y elipse

Se desea encontrar el punto de intersección entre una curva trascendental que relaciona con  $x$  y una elipse que modela una restricción geométrica. El sistema a resolver es:

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{0}$$

Sea  $\mathbf{x} = [x \ y]^T$ . El sistema a resolver es

$$\begin{cases} f_1(x, y) = y - \frac{1}{4}(e^{x^2} + e^{-x^2}) = 0 \\ f_2(x, y) = 9x^2 + 25y^2 - 225 = 0 \end{cases}$$

con Jacobiano

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{4}(2xe^{x^2} - 2xe^{-x^2}) & 1 \\ 18x & 50y \end{bmatrix}$$

### Parámetros numéricos:

- Semilla  $\mathbf{x}^{(0)} = [2.5; 2]^T$ .
- Tolerancia Relativa Tol =  $10^{-3}$ .

**Objetivo:** Aplicar el método de Newton para sistemas para aproximar  $\mathbf{x}^* = [x^* \ y^*]^T$  tal que  $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{0}$ .

### Indicaciones:

- a) Defina la función vectorial  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Evalúe  $\|\mathbf{f}([1; 1])\|_2$  y almacene ese escalar en `fvalue`.
- b) Defina el Jacobiano  $\mathbf{J}$  de la función vectorial  $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Evalúe  $\|\mathbf{J}([1; 1])\|_{\text{máx}}$  y almacene ese escalar en `jvalue`.
- c) Halle la primera aproximación de la solución del sistema de ecuaciones no lineales utilizando el método de Newton. Almacene el resultado en el vector columna `X1`.
- d) Aproxime la solución  $\mathbf{x}^*$  con Newton para sistemas usando  $\mathbf{x}^{(0)}$  como punto semilla y Tol =  $10^{-3}$ . Almacene en el vector columna `x_approx`.

### 3. Balance de calor por convección y radiación

Una placa metálica disipa calor hacia el ambiente por **convección y radiación**. En régimen estacionario, la temperatura superficial  $T$  se determina mediante un balance energético en el que el flujo de calor por unidad de área  $q''$  se evacua por ambos mecanismos.

**Modelo matemático** Para una superficie gris de emisividad  $\epsilon$  expuesta a un ambiente a temperatura  $T_\infty$ , el balance estacionario por unidad de área viene dado por

$$q'' = h(T - T_\infty) + \epsilon\sigma(T^4 - T_\infty^4),$$

donde  $h$  es el coeficiente convectivo ( $\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$ ) y  $\sigma = 5.670\,374\,419 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$  es la constante de Stefan-Boltzmann. La incógnita  $T$  se obtiene como raíz de

$$f(T) = h(T - T_\infty) + \epsilon\sigma(T^4 - T_\infty^4) - q'' = 0.$$

**Parámetros numéricos** Usar unidades SI:

- $h = 25 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$ .
- $\epsilon = 0.8$ .
- $\sigma = 5.670\,374\,419 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$ .
- $T_\infty = 300 \text{ K}$ .
- $q'' = 1000 \text{ W}/\text{m}^2$ .
- Intervalo inicial para la raíz:  $[a, b] = [300, 500] \text{ K}$  (verificar cambio de signo).
- Tolerancia:  $\text{Tol} = 10^{-3}$ .
- Iteraciones máximas:  $\text{maxit} = 100$ .

**Objetivo** Aplicar el **método de la bisección** en el intervalo  $[300, 500] \text{ K}$ , para aproximar la temperatura superficial  $T$  que satisface  $f(T) = 0$  con tolerancia  $\text{Tol} = 10^{-3}$ .

**Indicaciones:**

- a) Defina una función  $f(T)$  que represente el balance anterior. Evalúe  $|f(1)|$  y almacene el valor en `xvalue`.
- b) Halle el número de iteraciones necesarias para aproximar la solución  $T$  con tolerancia  $\text{Tol} = 1\text{e-}3$  y almacene el valor en `Niter`.
- c) Aproxime la solución  $T^*$  con tolerancia  $\text{Tol} = 1\text{e-}3$  mediante **bisección** en  $[300, 500] \text{ K}$ . Almacene la aproximación final en `xapprox`.
- d) Halle el error en la última iteración al aproximar la solución  $T$  con tolerancia  $\text{Tol} = 1\text{e-}3$  mediante **bisección** en  $[300, 500] \text{ K}$ . Almacene el error en `xerror`.

#### 4. Red de 4 mallas en un circuito

A partir de las leyes de Kirchhoff se obtiene un sistema lineal  $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$  para las corrientes de malla. Resuélvalo con el **método de Jacobi**.

**Modelo matemático:**

$$\begin{aligned}9x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 54.5 \\2x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= -14 \\-3x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 4x_4 &= 12.5 \\-2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 10x_4 &= -21\end{aligned}$$

**Parámetros numéricos:**

- $\mathbf{x}^{(0)} = [0; 0; 0; 0]$ . (El sistema es diagonal estrictamente dominante, por lo que Jacobi converge rápido.)
- $\text{Tol} = 1\text{e-}6$ .

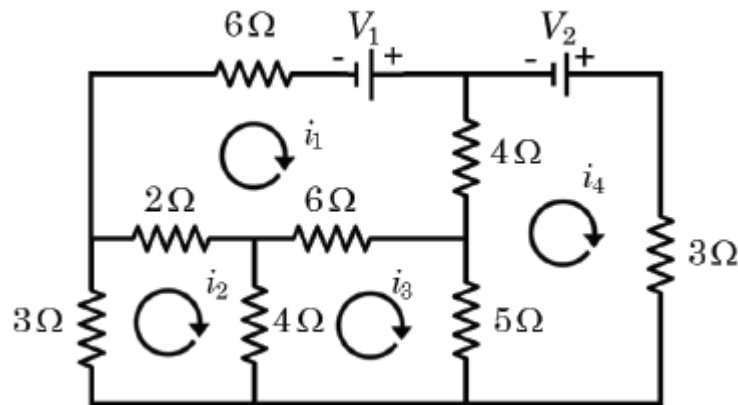
**Objetivo:** Aplicar Jacobi con la función local `jacobi` para aproximar  $\mathbf{x}^*$ .

**Indicaciones operativas:**

- a) Calcule el residuo inicial  $r(\mathbf{x}^{(0)}) = \mathbf{Ax}^{(0)} - \mathbf{b}$  usando  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$  y evalúe su norma infinita. Asigne el resultado a `xvalue`.
- b) Ejecute el método de Jacobi con  $\mathbf{x}^{(0)} = [0, 0, 0, 0]^T$ . Asigne los resultados finales según:
  - `x_sol`: vector columna de la solución aproximada.
  - `NumIter`: Número de iteraciones efectivas realizadas (No se considera la iteración 0).
  - `err_rel`: Error relativo cometido en la última iteración.
  - `rho_j`: Radio espectral de la matriz de iteración de Jacobi.

## 5. Malla de resistencias

Considere un sistema de respaldo conformado por baterías interconectadas, representado por el siguiente circuito.



Aplicando la ley de Kirchhoff al circuito mostrado en la figura, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 18 & -2 & -6 & -4 \\ -2 & 9 & -4 & 0 \\ -6 & -4 & m & -5 \\ -4 & 0 & -5 & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ V_2 \end{bmatrix}$$

Donde  $V_1 = 16.8 \text{ V}$ ,  $V_2 = 18.6 \text{ V}$ .

Efectúe las siguientes tareas:

- Halle los valores de  $m$  y  $n$  y determine el valor de  $m + n$  y almacénelo en la variable **vprueba**.
- Determine si la matriz es diagonal estrictamente dominante, en caso lo sea asigne a la variable **op** el valor 1, y en caso no lo sea asigne el valor 0.
- Determine el radio espectral de la matriz de iteración de Gauss-Seidel y almacénelo en la variable **rhoTgs**.
- Si el método de Gauss-Seidel es convergente asigne a la variable **conv** el valor 1, en caso no lo sea asigne el valor 0.