

EXAMEN DE LABORATORIO EL1 - TEO 9-12

Métodos Numéricos

10 de mayo de 2025

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 100 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 4 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. Predicción de posibles choques entre 2 móviles

Resumen del elemento

La trayectoria de un móvil es el lugar geométrico de todas sus posiciones y que es la gráfica de una ecuación no lineal. Un posible punto de choque entre dos móviles se da en las intersecciones de las trayectorias de cada uno

Modelo Matemático (sistema $F(x) = 0$)

Sean las siguientes curvas las trayectorias entre 2 móviles:

$$y^2(3+x) = x^2(3-x)$$

$$x^4 + y^4 = 4$$

Parámetros numéricos:

Semilla $\mathbf{x}_0 = [1, 1]^T$, tolerancia relativa $Tol = 10^{-3}$

Objetivo:

Aplicar el método de Newton para sistemas de ecuaciones no lineales para aproximar

$\mathbf{x}^* = [x^*, y^*]^T$ tal que $F(\mathbf{x}^*) = 0$.

Indicaciones

- Defina la función vectorial $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Evalúe $\|F([1; 1])\|_2$ y almacene ese escalar en F_{value} .
- Defina el Jacobiano J de la función vectorial $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. Evalúe $\|J([1; 1])\|_\infty$ y almacene ese escalar en J_{value} .
- Halle la primera aproximación de la solución del sistema de ecuaciones no lineales utilizando el método de Newton. Almacene el resultado en el vector columna X1.
- Aproxime la solución con el método de Newton para sistemas usando $\mathbf{x}_0$ como punto semilla y $Tol = 10^{-3}$; almacene en el vector columna x_{approx} .

2. Profundidad de Inmersión de una Boya

Resumen del elemento

Al colocar un objeto flotante en el agua, este se hunde hasta que el peso del agua desplazada (Empuje de Arquímedes) iguala su propio peso. Para una boya, esta condición de equilibrio resulta en una ecuación no lineal donde la incógnita es la profundidad de inmersión, h .

Modelo Matemático

Considere una boya de radio R y longitud L , con densidad ρ_b , flotando en un fluido de densidad ρ_f .

Del balance de fuerzas tenemos la siguiente ecuación:

$$f(h) = \rho_f \cdot A_{\text{imm}}(h) \cdot L - \rho_b \cdot (\pi R^2 L) = 0$$

Donde $A_{\text{imm}}(h)$ es el área de la sección transversal sumergida (segmento circular) en función de la profundidad h :

$$A_{\text{imm}}(h) = R^2 \cdot \cos^{-1} \left(\frac{R-h}{R} \right) - (R-h) \sqrt{2Rh - h^2}$$

Sustituyendo $A_{\text{imm}}(h)$ y simplificando la ecuación para encontrar la raíz h :

$$f(h) = R^2 \cdot \cos^{-1} \left(\frac{R-h}{R} \right) - (R-h) \sqrt{2Rh - h^2} - \frac{\rho_b}{\rho_f} \pi R^2 = 0$$

Parámetros Numéricos (Unidades SI)

Utilice los siguientes valores:

- Radio de la boya: $R = 0.5$ m
- Densidad del material: $\rho_b = 500$ kg/m³
- Densidad del fluido (Agua): $\rho_f = 1000$ kg/m³

Con estos valores se debe resolver el problema

Objetivo

Aplicar el **método de la bisección** en el intervalo $[0.1, 0.9]$ para aproximar la distancia hacia la superficie h que satisface $f(h) = 0$ con tolerancia $\text{Tol} = 10^{-4}$.

Indicaciones

- a) Defina una función $f(h)$ que represente el balance anterior. Evalúe $f(0.5)$ y almacene el valor en **h_value**.
- b) Halle el número de iteraciones necesarias (N) para alcanzar la solución con tolerancia $\text{Tol} = 10^{-4}$ y almacene el valor en **N_iter** (utilizando la fórmula teórica).
- c) Aproxime la solución h con tolerancia $\text{Tol} = 10^{-4}$ mediante bisección en $[0.1, 0.9]$; almacene la aproximación final en **h_aprox**.
- d) Halle el error absoluto en la última iteración, $E_N = \frac{b-a}{2^{N+1}}$, y almacene el error en **h_error**.

3. Red de 4 Mallas en un Circuito **Resumen del Elemento**

A partir de la Ley de Tensiones de Kirchhoff (LVK) aplicada a una red de 4 mallas en régimen estacionario, se obtiene un sistema lineal $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ para las corrientes de malla $\mathbf{x} = [i_1, i_2, i_3, i_4]^T$.

Modelo Matemático

El sistema de ecuaciones lineales es:

$$\begin{aligned}9i_1 - 2i_2 + i_4 &= 18 \\-2i_1 + 8i_2 - 2i_3 &= -4 \\-2i_2 + 10i_3 - i_4 &= 12 \\i_1 - 2i_3 + 7i_4 &= 5\end{aligned}$$

Parámetros Numéricos

Utilice los siguientes valores:

- Vector inicial: $\mathbf{x}^{(0)} = [0; 0; 0; 0]^T$
- Tolerancia: $\text{Tol} = 10^{-5}$

Objetivo

Aplicar el **método de Gauss-Seidel** con los parámetros numéricos para aproximar el vector de corrientes $\mathbf{x}^*$.

Indicaciones

- a) Calcule la iteración inicial $x^{(1)} = Ax^{(0)} - b$ y evalúe su norma. Asigne el resultado a $x_{\text{norm initial}}$.
- b) Ejecute el método de Gauss-Seidel y asigne los resultados finales según:
 - x_{sol} : Vector columna de la solución aproximada.
 - NumIter : Número de iteraciones efectivas realizadas.
 - err_{rel} : Error relativo porcentual de la última iteración
 - rho_{GS} : Radio espectral $\rho(\mathbf{T}_{\text{GS}})$ de la matriz de iteración.

4. Equilibrio en el brazo robotico

Un equipo de estudiantes de ingeniería mecatrónica de la UTEC se encuentra desarrollando el software de control para un brazo robótico de alta precisión. La posición final de equilibrio en el espacio tridimensional del efector del brazo, denotada por el vector $\mathbf{P} = (x, y, z)$, está determinada por un complejo sistema de ecuaciones no lineales que relaciona las tensiones de los motores y las fuerzas de acople.

Modelo matemático

$$x^2 + y^2 + z^2 - 10 = 0$$

$$10y - \sin(xz) - 8 = 0$$

$$8z - e^{0.1xy} - 5 = 0$$

Objetivo

Resolver este sistema con el método iterativo de punto fijo para hallar el equilibrio en el brazo robotico. con una $Tol = 10^{-4}$ y punto inicial $x = (1.5, 0.5, 0.5)$

Indicaciones

- a) Defina funciones de iteración $G_1(x, y, z)$, $G_2(x, y, z)$ y $G_3(x, y, z)$ y halle el jacobiano de dicha matriz. (Sugerencia: Usar sym)
- b) Evalúe el Jacobiano en el punto semilla y verifique el criterio de convergencia
- c) Calcule la primera iteración y almacénala en la variable x_{approx}
- d) Calcule el punto de equilibrio del brazo robotico.

5. Propagación de Errores en un Modelo Geotécnico

Un ingeniero geotecnista evalúa la estabilidad de un talud mediante el **Factor de Seguridad (FS)**, cuya fórmula es:

$$FS(c, \gamma, H, \beta, \phi) = \frac{c}{\gamma H \sin(\beta) \cos(\beta)} + \frac{\tan(\phi)}{\tan(\beta)}$$

Los parámetros medidos en campo y sus incertidumbres asociadas son los siguientes:

Parámetro	Símbolo	Valor Medido	Error Absoluto (Δ)
Cohesión	c	25 kPa	± 1.5 kPa
Peso Específico	γ	18 kN/m ³	± 0.5 kN/m ³
Altura del Talud	H	10 m	± 0.2 m
Ángulo del Talud	β	30°	$\pm 1.0^\circ$
Ángulo de Fricción	ϕ	35°	$\pm 1.2^\circ$

Cuestionario

- Calcule el valor nominal del Factor de Seguridad (FS) utilizando los valores medidos. Según este resultado, ¿se consideraría estable el talud (criterio: $FS > 1.5$)?
- Halle las cinco derivadas parciales de la función FS con respecto a cada variable: $\frac{\partial FS}{\partial c}$, $\frac{\partial FS}{\partial \gamma}$, $\frac{\partial FS}{\partial H}$, $\frac{\partial FS}{\partial \beta}$, y $\frac{\partial FS}{\partial \phi}$.
- Utilizando la aproximación de primer orden de la serie de Taylor, estime el error absoluto total (ΔFS) en el Factor de Seguridad evaluando las derivadas en el punto nominal.
- Expresé el resultado final en el formato $FS = FS_{nominal} \pm \Delta FS$. Considerando el rango de incertidumbre, ¿puede el ingeniero garantizar con certeza que el talud es estable? Justifique su respuesta.