

EXAMEN DE LABORATORIO EL1

Métodos Numéricos

Jueves 2 de octubre del 2024

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 90 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 7 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. Propagación de errores - Ecuación de Redlich-Kwong-Soave

En un experimento de caracterización de gases reales, se midió el volumen molar y se desea validar si la presión registrada por el manómetro es consistente con la calculada mediante la ecuación de estado de Redlich-Kwong-Soave modificada. Para ello, determine los intervalos de confianza y analice las contribuciones de cada variable a la incertidumbre total.

$$P = \frac{RT}{V_m - b} - \frac{a}{V_m^2 + bV_m + b^2}$$

con:

- Parámetro de atracción: $a = 4.10L^2 \cdot \text{atm}/\text{mol}^2$
- Parámetro de volumen: $b = 0.0380L/\text{mol}$
- Constante de gases: $R = 0.08206 \pm 0.00001L \cdot \text{atm}/(K \cdot \text{mol})$
- Temperatura: $T = 450.0 \pm 0.5^\circ C$
- Volumen molar: $V_m = 0.625 \pm 0.005L/\text{mol}$
- Presión medida: $P_{\text{medida}} = 90.0 \pm 0.4 \text{ atm}$

Observación: Trabaje siempre con la temperatura absoluta (K). Para convertir desde $^\circ C$, recuerde simplemente sumar 273.15.

Realice lo siguiente:

- a) Calcular el valor estimado de P , guardar el resultado en la variable `P_calculada`.
- b) Calcular el error total de P , guardar el resultado en la variable `dP_total`.
- c) Determinar el error absoluto que contribuye cada variable (R, T, V_m) a la incertidumbre de P . Guarde dichos valores en el vector fila numérico `dP_contribuciones`, en el mismo orden de las variables.
- d) Evaluar si el intervalo de confianza para la presión medida se solapa con el intervalo de confianza para la presión calculada. Asigne a la variable `op` el valor de 1 si esto ocurre; en caso contrario, asigne a `op` el valor de 0.

2. **Ecuaciones No Lineales** Se tiene la función:

$$f(x) = \exp(0.4x - 0.05x^2) + \frac{\sin(3x)}{1 + x^2} - (x + 1.2)$$

en el intervalo $[-4, 4]$.

Realice lo siguiente:

- a) Determine el número de raíces reales de f en $[-4, 4]$ y asigne el valor a la variable **nvar**.
- b) Localice el intervalo $[a, b]$ de longitud 1 con extremos enteros que contenga la menor raíz. Almacene el resultado en el vector fila **test**, donde **test** = $[a, b]$.
- c) Aproxime la menor raíz en $[-4, 4]$ utilizando el **método de la bisección** en el intervalo $[a, b]$ con una tolerancia $\text{tol} = 1\text{e-}8$ y asigne el resultado a la variable **yaprox**.
- d) Determine la cantidad de iteraciones empleadas por el método de bisección ejecutado en el ítem anterior. Asigne el resultado a la variable **niter**.

3. En el análisis de un intercambiador de calor de tubos y coraza, el balance de energía en tres zonas críticas genera un sistema no lineal $\mathbf{F}(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$.

$$\begin{cases} T_A - 0.3T_B - 1.5 \ln(1 + 0.008T_C) - 180 = 0 \\ 0.001T_A^2 + 1.25T_B - 0.6T_C - 360 = 0 \\ e^{-0.003(T_A+T_B)} - 0.01T_AT_C + 840 = 0 \end{cases}$$

Condiciones y parámetros del problema:

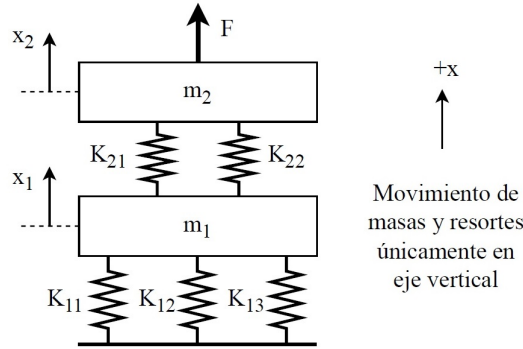
- Vector de incógnitas: $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_A \\ T_B \\ T_C \end{bmatrix}$, donde T_A, T_B, T_C son temperaturas (en Kelvin) en los puntos A, B, C .
- Punto inicial: $\mathbf{T}^{(0)} = \begin{bmatrix} 300 \\ 290 \\ 280 \end{bmatrix}$
- Tolerancia para el error relativo $\delta^{(k)}$: $\text{Tol} = 1 \times 10^{-5}$
- Tolerancia para la norma de $\mathbf{F}$: $F_{\text{tol}} = 1 \times 10^{-4}$
- Criterio de parada: $\delta^{(k)} \leq \text{Tol}$ y $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}^{(k)})\|_{\infty} \leq F_{\text{tol}}$

Se pide determinar las temperaturas de equilibrio usando el **método de punto fijo**. Para ello, despeje de la primera ecuación la variable T_A , despeje de la segunda ecuación la variable T_B y despeje de la tercera ecuación la variable T_C .

- a) Defina la función vectorial $\mathbf{F}(\mathbf{T})$ para el sistema no lineal $\mathbf{F}(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$. Guarde el valor de $\|\mathbf{F}(\mathbf{T}^{(0)})\|_{\infty}$ en la variable `fval`.
- b) Determine la función vectorial $\mathbf{G}(\mathbf{T})$ para el problema de punto fijo $\mathbf{T} = \mathbf{G}(\mathbf{T})$. Guarde el valor de $\|\mathbf{G}(\mathbf{T}^{(0)})\|_{\infty}$ en la variable `gval`.
- c) Resuelva el sistema mediante el método de punto fijo para sistemas no lineales considerando el criterio de parada especificado. Guarde el resultado en el vector columna `Tsol`.
- d) Halle la cantidad de iteraciones para obtener la aproximación `Tsol`. Guarde el resultado en la variable `niter`.

4. Métodos Iterativos para SEL

Se presenta el siguiente sistema formado por dos bloques sin masa conectados por resortes, donde se aplica una fuerza externa F sobre el bloque superior. Se asume que el movimiento de las masas y los resortes se produce únicamente en el eje vertical, como en la figura.



El sistema se encuentra en equilibrio estático y los desplazamientos de los bloques son x_1 (para el bloque inferior m_1) y x_2 (para el bloque superior m_2). El sistema de ecuaciones lineales es:

$$\begin{bmatrix} (K_{11} + K_{12} + K_{13} + K_{21} + K_{22}) & -(K_{21} + K_{22}) \\ -(K_{21} + K_{22}) & (K_{21} + K_{22}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -m_1 g \\ F - m_2 g \end{bmatrix}$$

Los parámetros del sistema son los siguientes:

- Los valores de las constantes de resorte son: $K_{11} = K_{12} = K_{13} = 4 \frac{\text{N}}{\text{m}}$, $K_{21} = K_{22} = 12 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.
- Los valores de las masas son: $m_1 = 0\text{kg}$, $m_2 = 0\text{kg}$.
- La fuerza aplicada es: $F = 15\text{N}$.
- Considere la gravedad $g = 9.8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Realice lo siguiente:

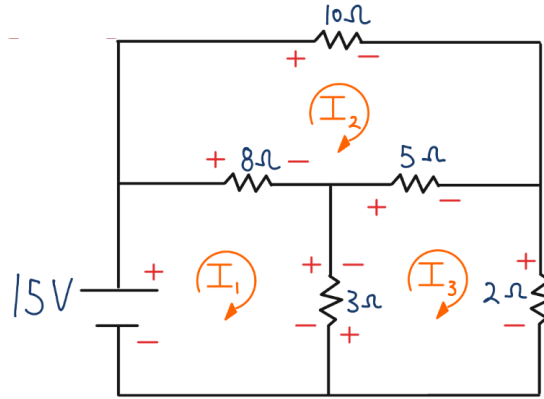
- a) Determine el sistema de ecuaciones lineales, defina la matriz $\mathbf{A}$ y el vector $\mathbf{b}$. Guarde el resultado en la variable $\mathbf{Mb} = [\mathbf{A}, \mathbf{b}]$.
- b) Halle el radio espectral de la matriz $\mathbf{T}_J$ de Jacobi y $\mathbf{T}_{GS}$ de Gauss-Seidel y determine si los esquemas iterativos correspondientes convergen. Guarde en la variable `conv`, una matriz que identifique la convergencia de cada método de la siguiente manera:

$$\text{conv} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{T}_J) & \text{OP}_J \\ \rho(\mathbf{T}_{GS}) & \text{OP}_{GS} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 (no converge, 0) y el método de Gauss-Seidel tiene radio espectral de 0.8 (converge, 1), entonces `conv` será $\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$.

- c) Lleve a cabo el método de **Jacobi** con $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 1]^T$ y una tolerancia de $1\text{e-}4$. Almacene la solución en el vector columna `xjac` y el número de iteraciones en `njac`. En caso de no convergencia, establezca `xjac = 0` y `njac = 0`.
- d) Si la constante de resorte K_{11} varía tomando los valores enteros desde 5N/m hasta 15N/m , almacene en la variable `xsol` las soluciones usando el método de **Gauss-Seidel** en la matriz `xsol = [x1 x2 ... xn]`, donde cada columna es la solución en forma de vector columna según la variación de K_{11} en el vector dado. Considere el mismo punto semilla y la misma tolerancia.

5. **Modelamiento con SEL (Circuito)** Se presenta un circuito en la siguiente figura.



Dicho sistema es modelado con las leyes de Kirchhoff para obtener un sistema de 3 ecuaciones lineales con 3 incógnitas correspondientes a las corrientes I_1, I_2, I_3 .

El sistema matricial dado en el enunciado de la imagen es:

$$\begin{bmatrix} 11 & -a_{12} & -3 \\ -a_{12} & 23 & -5 \\ -3 & -5 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Realice lo siguiente:

- Determine los elementos a_{12} y b_3 . Guarde los valores en `val = [a12, b3]`.
- Halle el radio espectral de la matriz $\mathbf{T}_J$ de Jacobi y $\mathbf{T}_{GS}$ de Gauss-Seidel y determine si los esquemas iterativos correspondientes convergen. Guarde en la variable `conv`, una matriz que identifique la convergencia de cada método de la siguiente manera:

$$\text{conv} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{T}_J) & \text{OP}_J \\ \rho(\mathbf{T}_{GS}) & \text{OP}_{GS} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 (no converge, 0) y el método de Gauss-Seidel tiene radio espectral de 0.8 (converge, 1), entonces `conv` será $\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$.

- Lleve a cabo el método de **Jacobi** con $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ y una tolerancia de $1e-4$. Almacene la solución en el vector numérico `xjac` y el número de iteraciones en `njac`. En caso de no convergencia, establezca `xjac = 0` y `njac = 0`.
- Si la fuente de voltaje (de 15V) varía tomando los valores enteros desde 10V hasta 20V, almacene en la variable `xsol` las soluciones usando el método de **Gauss-Seidel** en la matriz `xsol = [x1 x2 ... xn]`, donde cada columna es la solución aproximada según la variación de los valores de la fuente de voltaje. Considere el mismo punto semilla y la misma tolerancia del ítem previo.