

EXAMEN DE LABORATORIO EL1

Métodos Numéricos

4 de octubre del 2025

- El examen consta de 5 problemas, cada uno con un valor de 4 puntos, sumando un total de 20 puntos. La duración del examen será de 90 minutos.
- Está estrictamente prohibido el uso de cartucheras, calculadoras, notas o cualquier otro tipo de material adicional. No se permite el préstamo de ningún material durante el examen.
- No se responderán consultas durante el examen. Si considera que alguna pregunta está mal planteada o contiene errores, envíe su solución en formato `.mlx` al correo del curso, indicando claramente su sección y el número de la pregunta. Esta corrección deberá enviarse dentro del tiempo asignado para el examen, y será evaluada posteriormente. Que se acepte o no su corrección dependerá de la revisión final.
- Justifique detalladamente cada uno de sus pasos y las decisiones tomadas en su código para llegar a la solución final.
- El orden, la claridad y la organización en la presentación de su código y resultados son fundamentales. Si el trabajo no es claro o está desorganizado, su respuesta podría no ser evaluada.
- El uso de cualquier herramienta que no sea MATLAB Grader o el entorno indicado para el examen resultará en la anulación inmediata de su evaluación.
- Está prohibido el uso de comandos como `clc`, `clear all`, y otros similares, a menos que se indique explícitamente lo contrario en las instrucciones del examen.
- No se aceptarán reclamos derivados de errores en la denominación de variables. Esto incluye errores como el uso incorrecto de mayúsculas o minúsculas, omitir letras en los nombres de variables, o confundir un vector fila con uno columna y viceversa. Es su responsabilidad asegurarse de que su código respete rigurosamente la sintaxis y los nombres indicados en el enunciado del problema.
- Todos los reclamos deberán hacerse rescatando su ID y llenando el formulario proporcionado en los módulos de la semana 7 de Canvas. El formulario deberá completarse dentro del tiempo indicado para poder ser considerado.
- Cualquier violación de estas normas será motivo de sanción según el reglamento académico.

1. Propagación de errores - Modelo de transferencia de calor combinado

El flujo de calor total Q desde una superficie a un medio circundante y hacia un entorno radiativo se modela por:

$$Q = A [h(T_s - T_\infty) + \epsilon\sigma(T_s^4 - T_{\text{sur}}^4)]$$

donde Q es el flujo de calor (W), A el área expuesta (m^2), h el coeficiente convectivo ($\text{W}/(\text{m}^2\text{K})$), T_s la temperatura de la superficie (K), T_∞ la temperatura del aire (K), ϵ la emisividad (adimensional), σ la constante de Stefan-Boltzmann ($\text{W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$) y T_{sur} la temperatura del entorno radiativo (K).

Considerando los valores:

- $h = 18 \text{ W}/(\text{m}^2\text{K})$
- $\epsilon = 0.85$
- $A = 0.85 \text{ m}^2 \pm 0.010 \text{ m}^2$
- $T_s = 420 \text{ K} \pm 0.0036$
- $T_\infty = 295 \text{ K} \pm 0.30 \%$
- $T_{\text{sur}} = 305 \text{ K} \pm 0.33 \%$
- $\sigma = 5.670374419 \times 10^{-8} \text{ W}/(\text{m}^2\text{K}^4)$

Tareas:

- a) Estime el flujo de calor nominal Q con los valores dados y guárdelo en `Qest_W`.
- b) Usando la ecuación, estime el error absoluto ΔQ (W) y el error relativo porcentual de Q . Guarde en `errAbs_Q_W` y `errRelPct_Q`.
- c) Determine el porcentaje de contribución de cada variable $A, T_s, T_\infty, T_{\text{sur}}$ al error total de Q y almacénelos en `contri = [pct_A; pct_Ts; pct_Tinf; pct_Tsur]`.
*Nota: **contri** es un vector columna y la suma de sus elementos debe ser 100 %.*

2. Ecuaciones No Lineales - Localización y Bisección

Se tiene la función:

$$f(x) = 0.02x^5 - 4.2x + \sin(0.1x^3)$$

en el intervalo $[-4, 4]$.

Tareas:

- a) Grafique para determinar el número de raíces reales de f en $[-4, 4]$ y asigne el valor a la variable `nroot`.
- b) Localice del gráfico el intervalo $[a_1, b_1]$ de longitud 1 con extremos enteros que contenga la **menor raíz**. Almacene el resultado en el vector fila `test_min = [a1, b1]`.
- c) Localice del gráfico el intervalo $[a_2, b_2]$ de longitud 1 con extremos enteros que contenga la **mayor raíz**. Almacene el resultado en el vector fila `test_max = [a2, b2]`.
- d) Aproxime la menor raíz en $[-4, 4]$ utilizando el método de la **bisección** en el intervalo $[a_1, b_1]$ con una tolerancia `tol = 1e-6` y asigne el resultado a la variable `xmin_aprox`.
- e) Aproxime la mayor raíz en $[-4, 4]$ utilizando el método de la **bisección** en el intervalo $[a_2, b_2]$ con una tolerancia `tol = 1e-6` y asigne el resultado a la variable `xmax_aprox`.

3. Sistema de ecuaciones no lineales - Venturi con C_d dependiente de Reynolds

En un medidor Venturi se conoce el salto de presión Δp entre la entrada (diámetro D_1) y la garganta (diámetro D_2). Se desea determinar el caudal Q y el coeficiente de descarga C_d , considerando que C_d depende del número de Reynolds en la garganta. El sistema de ecuaciones es:

$$\begin{cases} F_1(Q, C_d) = Q - C_d \left(\frac{\pi D_2^2}{4} \right) \sqrt{\frac{2 \Delta p}{\rho \left[1 - \left(\frac{D_2}{D_1} \right)^4 \right]}} = 0 \\ F_2(Q, C_d) = C_d - \left(C_0 + C_1 \frac{\pi D_2 \nu}{4Q} + C_2 \left(\frac{\pi D_2 \nu}{4Q} \right)^{2/3} \right) = 0 \end{cases}$$

Use los siguientes datos numéricos:

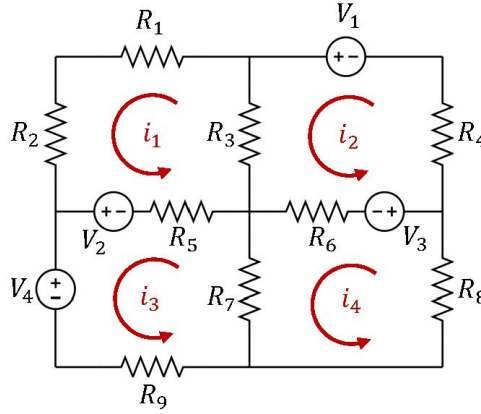
- $D_1 = 0.150$ m, $D_2 = 0.075$ m
- $\rho = 998$ kg/m³, $\nu = 1.004 \times 10^{-6}$ m²/s
- $\Delta p = 12\,000$ Pa
- $C_0 = 0.985$, $C_1 = 35$, $C_2 = 0.005$

Tareas:

- a) En un método gráfico se puede estimar la solución (Q, C_d) usando una malla con espaciamiento 0.01 en ambas variables, usando $Q \in [0.01 : 0.01 : 0.10]$ m³/s y $C_d \in [0.90 : 0.01 : 1]$. Use solo la información de la malla para obtener una raíz donde $F\left(\begin{bmatrix} Q \\ C_d \end{bmatrix}\right) \approx 0$. Almacene la raíz en $\mathbf{xgraf} = \begin{bmatrix} Q_{\text{graf}} \\ C_{d\text{graf}} \end{bmatrix}$. *Sugerencia: puede usar un doble bucle y la norma infinito ($\|\cdot\|_\infty$) como criterio de proximidad a la raíz.*
- b) Aplique Newton matricial al sistema $\mathbf{F} = [F_1, F_2]^T$ con punto semilla $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0.02 \\ 1 \end{bmatrix}$ y tolerancia 1e-6. Guarde la solución en $\mathbf{xsol}$.
- c) Halle el error relativo δ que hay entre los resultados del ítem (1) y (2), considerando como valor verdadero a la estimación por el método de Newton. Almacene el valor en la variable **delta**.
- d) Analice la sensibilidad a Δp resolviendo para $\Delta p \in \{8\,000, 10\,000, 12\,000, 14\,000\}$ Pa con el mismo punto semilla y tolerancia del punto (2). Guarde las soluciones en $\mathbf{xvar}$ (columnas $\begin{bmatrix} Q \\ C_d \end{bmatrix}$). Luego almacene el valor máximo de Q y el valor mínimo de C_d en la variable $\mathbf{xsen} = \begin{bmatrix} Q_{\text{máx}} \\ C_{d\text{mín}} \end{bmatrix}$. *Note que $Q_{\text{máx}} = \text{máx}(\mathbf{xvar}(1,:))$ y $C_{d\text{mín}} = \text{mín}(\mathbf{xvar}(2,:))$.*

4. Métodos Iterativos para SEL

Se presenta el siguiente circuito donde se deben determinar las corrientes indicadas.



Dicho sistema puede ser modelado con las leyes de Kirchhoff para obtener un sistema de 4 ecuaciones lineales con 4 incógnitas correspondientes a las corrientes i_1, i_2, i_3 e i_4 .

El sistema se puede expresar en la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ siguiente:

$$\begin{bmatrix} (R_1 + R_2 + R_3 + R_5) & -R_3 & -R_5 & 0 \\ -R_3 & (R_3 + R_4 + R_6) & 0 & -R_6 \\ -R_5 & 0 & (R_5 + R_7 + R_9) & -R_7 \\ 0 & -R_6 & -R_7 & (R_6 + R_7 + R_8) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -V_2 \\ V_1 + V_3 \\ V_2 - V_4 \\ -V_3 \end{bmatrix}$$

Los valores de las resistencias son:

$$\begin{array}{lllll} R_1 = 1 \, \Omega & R_2 = 1 \, \Omega & R_3 = 3 \, \Omega & R_4 = 2 \, \Omega & R_5 = 2 \, \Omega \\ R_6 = 2 \, \Omega & R_7 = 1 \, \Omega & R_8 = 1 \, \Omega & R_9 = 1 \, \Omega & \end{array}$$

Los valores de las tensiones:

$$V_1 = 20 \, \text{V} \quad V_2 = 5 \, \text{V} \quad V_3 = 3 \, \text{V} \quad V_4 = 10 \, \text{V}$$

Tareas:

- a) Halle el radio espectral de la matriz $\mathbf{T}_J$ de Jacobi y $\mathbf{T}_{GS}$ de Gauss-Seidel y determine si los esquemas iterativos correspondientes convergen. Guarde en la variable `conv`, una matriz que identifique la convergencia de cada método de la siguiente manera:

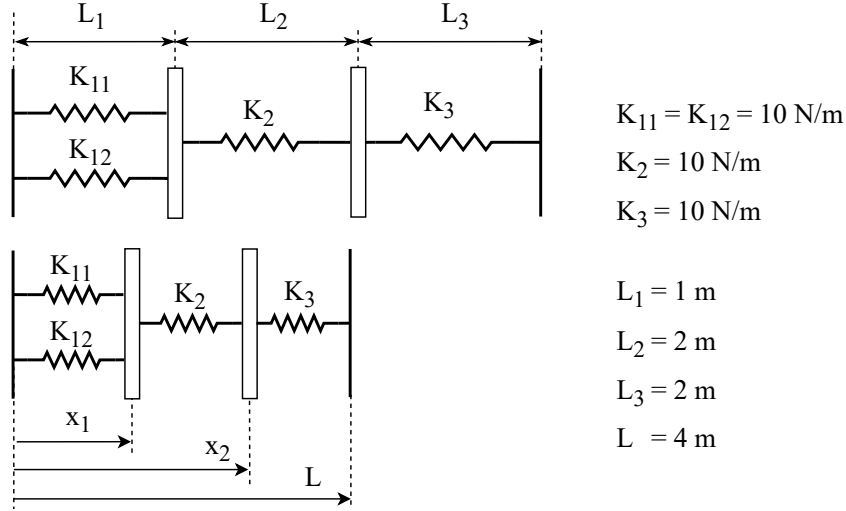
$$\text{conv} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{T}_J) & \text{OP}_J \\ \rho(\mathbf{T}_{GS}) & \text{OP}_{GS} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 (no converge, 0) y el método de Gauss-Seidel tiene radio espectral de 0.8 (converge, 1), entonces `conv` será $\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}$.

- b) Lleve a cabo el método de **Gauss-Seidel** con $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \, 1 \, 1 \, 1]^T$ y una tolerancia de $1e-5$. Almacene la solución en el vector columna `xgs` y el número de iteraciones en `ngs`. En caso de no convergencia establezca `xgs` = 0 y `ngs` = 0.
- c) Si $\mathbf{R}_7$ varía entre 1:0.4:5, almacene en la variable `xtot` las soluciones usando el método de **Jacobi** en la forma de matriz `xtot` = $[\mathbf{x}_1 \, \mathbf{x}_2 \, \dots \, \mathbf{x}_n]$, donde cada columna es la solución en forma de vector columna según la variación de $\mathbf{R}_7$ en el vector dado. Considere el mismo punto semilla y tolerancia del ítem anterior.

5. Aplicaciones de SEL: Sistema Masa-Resorte

Se presenta el siguiente sistema formado por dos bloques sin masa conectados por resortes, donde la pared derecha se desplaza hacia la derecha como indica la figura. Cuatro resortes con distintas constantes elásticas forman un sistema mixto en serie y paralelo. Tras comprimirse, la distancia total entre los extremos es $L = 4$ m.



Se requiere estimar las posiciones intermedias x_1 y x_2 considerando que el sistema se encuentra en equilibrio.

El sistema se puede expresar en la forma matricial $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ siguiente:

$$\begin{bmatrix} (K_{11} + K_{12} + K_2) & -K_2 \\ -K_2 & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ K_2 L_2 - K_3(L_3 - L) \end{bmatrix}$$

Tareas:

- Defina los elementos a_{22}, b_1 . Guarde los valores en $\mathbf{val} = [a_{22} \ b_1]$.
- Halle el radio espectral de la matriz $\mathbf{T}_J$ de Jacobi y $\mathbf{T}_{GS}$ de Gauss-Seidel y determine si los esquemas iterativos correspondientes convergen. Guarde en la variable **conv**, una matriz que identifique la convergencia de cada método de la siguiente manera:

$$\mathbf{conv} = \begin{bmatrix} \rho(\mathbf{T}_J) & \text{OP}_J \\ \rho(\mathbf{T}_{GS}) & \text{OP}_{GS} \end{bmatrix}$$

Por ejemplo, si el método de Jacobi tiene un radio espectral de 1.2 (no converge) y el método de Gauss-Seidel tiene radio espectral de 0.8 (converge), entonces **conv** será

$$\begin{bmatrix} 1.2 & 0 \\ 0.8 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Lleve a cabo el método de **Gauss-Seidel** con $\mathbf{x}^{(0)} = [1 \ 1]^T$ y una tolerancia de $1e-5$. Almacene la solución en el vector columna **xgs** y el número de iteraciones en **ngs**. En caso de no convergencia, establezca **xgs** = 0 y **ngs** = 0.
- Si $\mathbf{K}_2$ varía entre 5:1:15, almacene en la variable **xtot** las soluciones usando el método de **Jacobi** en la forma de matriz $\mathbf{xtot} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_n]$, donde cada columna es la solución en forma de vector columna según la variación de $\mathbf{K}_2$ en el vector dado. Considere el mismo punto semilla y tolerancia del ítem anterior.