

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 30 minutos

Fecha: 11 de junio de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borradores. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. [9 pts] Considere la integral:

$$I = \int_0^1 e^x dx, \quad I_{\text{exacta}} = e - 1 = 1.7183.$$

Efectúe lo siguiente:

a) [3 pts] Usando la fórmula de error

$$E = \frac{b-a}{6} h^2 f''(\xi), \quad \xi \in (a, b),$$

determine el mínimo número de particiones N para obtener un error absoluto menor que 0.01.

$$f''(x) = \boxed{}, \quad M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \boxed{}$$

$$\frac{1}{6} \left(\frac{1}{N} \right)^2 M < 0.01 \implies N_{\min} = \boxed{}$$

b) [2 pts] Indique el orden del error de los siguientes métodos de Newton–Cotes:

Método	Orden del error global		
Trapecio compuesto			
Simpson 1/3 compuesto			

c) [3 pts] Complete la tabla de Romberg con orden $k = 4$, es decir, error $\mathcal{O}(h^8)$.

$$I(j, k) = \frac{4^{k-1}}{4^{k-1} - 1} I_{(j+1, k-1)} - \frac{1}{4^{k-1} - 1} I_{(j, k-1)}.$$

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j = 1$	1.8591	1.7189	1.7183	
$j = 2$	1.7539	1.7183		
$j = 3$	1.7272			
$j = 4$	1.7205			

d) [1 pts] Indique el resultado:

$$I_{\text{Romberg}} = \boxed{}$$

2. [11 pts] Considere la integral:

$$I = \int_0^2 (e^x + 2x^2 + 7) dx.$$

Efectúe lo siguiente:

- a) [2 pts] Realice el cambio de variable para obtener límites de integración entre -1 y 1 .
b) [2 pts] Identifique la función $g(z)$ cuyos límites de integración están entre -1 y 1 , de modo que

$$I = \int_{-1}^1 g(z) dz.$$

- c) [3 pts] Aplique la Cuadratura Gaussiana con 3 puntos. Considere los siguientes pesos y puntos:

$$c_0 = \frac{5}{9}, \quad c_1 = \frac{8}{9}, \quad c_2 = \frac{5}{9},$$

$$z_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \quad z_1 = 0, \quad z_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

- d) [1 pts] Responda: de acuerdo con la teoría, ¿el resultado obtenido con Gauss–Legendre de 3 puntos es exacto? Justifique brevemente su respuesta.
e) [3 pts] Usando la serie de Taylor, demuestre la siguiente fórmula de diferenciación numérica de cuatro puntos para aproximar la primera derivada:

$$f'(x) \approx \frac{-2f(x-h) - 3f(x) + 6f(x+h) - f(x+2h)}{6h}$$

e indique su orden de error.

Para la demostración, use como ayuda las siguientes expansiones de Taylor alrededor de x :

$$f(x-h) = f(x) - hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) - \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5),$$

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2}f''(x) + \frac{h^3}{6}f'''(x) + \frac{h^4}{24}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5),$$

$$f(x+2h) = f(x) + 2hf'(x) + 2h^2f''(x) + \frac{4h^3}{3}f'''(x) + \frac{2h^4}{3}f^{(4)}(x) + \mathcal{O}(h^5).$$

Sustituya estas expansiones en el numerador

$$-2f(x-h) - 3f(x) + 6f(x+h) - f(x+2h),$$

simplifique los términos semejantes, despeje $f'(x)$ y concluya el orden del error de la fórmula.

