

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 30 minutos

Fecha: 12 de junio de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borradores. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. [9 pts] En un ensayo de ventilación controlada, se registra la tasa instantánea $C = C(t)$ de acumulación de un contaminante en una cámara experimental. Durante el ensayo, en $t = 4$ horas se activa un segundo régimen de ventilación, por lo que la tasa de acumulación cambia de forma discontinua. La tasa se modela mediante

$$C(t) = \begin{cases} 3t + 1, & 2 \leq t \leq 4, \\ t^2 + 5 + e^{-(t-4)}, & 4 < t \leq 6. \end{cases}$$

La cantidad total acumulada del contaminante en el intervalo $2 \leq t \leq 6$ se expresa como

$$Q = \int_2^4 C_1(t) dt + \int_4^6 C_2(t) dt,$$

donde $C_1(t) = 3t + 1$ y $C_2(t) = t^2 + 5 + e^{-(t-4)}$.

- a) [2 pts] Escriba la expresión que se obtiene con el método de Trapecio compuesto respetando los dos tramos de integración, usando dos subintervalos en $[2, 4]$ y cuatro subintervalos en $[4, 6]$.

$Q_{\text{trap}} \approx$

--

=

--

Nota: En la primera casilla, dar la expresión en términos de C_1 y C_2 sin evaluar; en la segunda casilla, dar el valor numérico de la aproximación.

- b) [5 pts] Aplique Romberg únicamente al segundo tramo, y complete la tabla de Romberg con orden $k = 4$, es decir, error $\mathcal{O}(h^8)$.

$$I(j, k) = \frac{4^{k-1}}{4^{k-1} - 1} I_{(j+1, k-1)} - \frac{1}{4^{k-1} - 1} I_{(j, k-1)}.$$

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j = 1$	63.1353		61.5314	
$j = 2$		61.5316		
$j = 3$	61.6326			
$j = 4$	61.5567			

- c) [2 pts] A partir de la tabla, determine los errores relativos $\varepsilon_{j,k}$ respecto al valor exacto $Q_{2,\text{exacto}} = 61.5313314$. Usar notación científica

$$\varepsilon_{j,k} = \left| \frac{Q_{2,\text{exacto}} - I(j,k)}{Q_{2,\text{exacto}}} \right|.$$

$\varepsilon_{1,1}$	=		=	
$\varepsilon_{1,2}$	=		=	

2. [11 pts] De acuerdo con la siguiente integral,

$$I = \int_1^5 (5 + \cos x) dx, \quad I_{\text{exacta}} = 18.1996,$$

- a) [2 pts] Determine los nodos z_i y pesos c_i para la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos, a partir del polinomio de Legendre:

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \quad c_i = \frac{2}{(1 - z_i^2) [P'_3(z_i)]^2}.$$

- b) [2 pts] Realice el cambio de variable $x \mapsto z$ para obtener límites de integración entre -1 y 1 y determine la función $g(z)$ consistente con dichos límites.
- c) [4 pts] Aplique Cuadratura Gaussiana con 3 puntos y halle la aproximación integral.
- d) [3 pts] Determine una cota para el error cometido usando la expresión:

$$|E_G| \leq \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3) [(2n+2)!]^3} \max_{\xi \in [-1,1]} |g^{(2n+2)}(\xi)|,$$

donde $\xi \in (-1, 1)$ y recordando que para la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos se cumple $n+1 = 3$.

