

Código de Alumno:

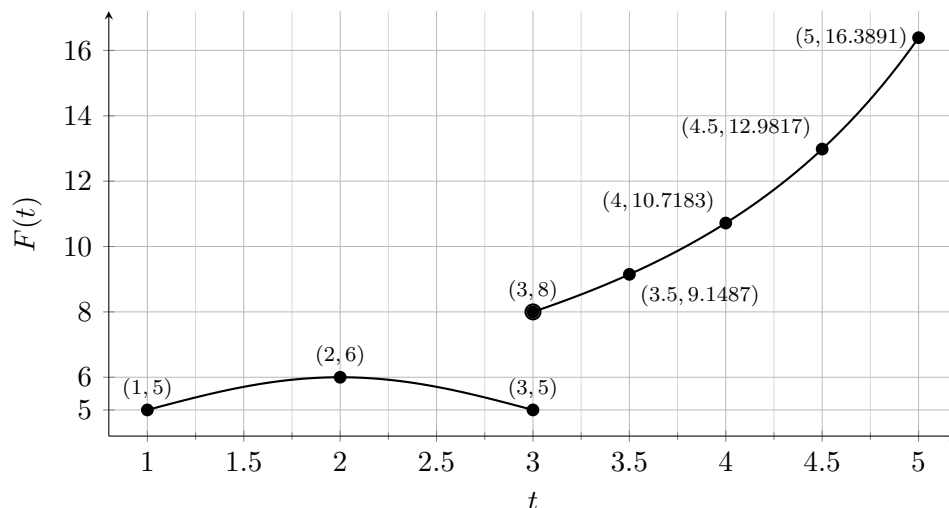
--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 30 minutos

Fecha: 12 de junio de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borradores. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. [9 pts] En un sistema de monitoreo de tránsito, se registra la tasa instantánea $F = F(t)$ de vehículos que atraviesan un punto de control. Durante la observación, en $t = 3$ horas se habilita una vía auxiliar, por lo que la tasa registrada cambia de manera discontinua. La evolución de la tasa se representa mediante dos curvas $F_1(t)$ y $F_2(t)$, tal como se muestra en la siguiente gráfica.



La cantidad total de vehículos que atraviesan el punto de control durante el intervalo $1 \leq t \leq 5$ se expresa como

$$N = \int_1^3 F_1(t) dt + \int_3^5 F_2(t) dt.$$

- a) [2 pts] Escriba la expresión que se obtiene con el método de Trapecio compuesto respetando los dos tramos de integración, usando dos subintervalos en $[1, 3]$ y cuatro subintervalos en $[3, 5]$.

$N_{\text{trap}} \approx$

$=$

Nota: En la primera casilla, dar la expresión en términos de F_1 y F_2 sin evaluar; en la segunda casilla, dar el valor numérico de la aproximación.

- b) [5 pts] Aplique Romberg únicamente al segundo tramo, y complete la tabla de Romberg

con orden $k = 4$, es decir, error $\mathcal{O}(h^8)$.

$$I(j, k) = \frac{4^{k-1}}{4^{k-1} - 1} I_{(j+1, k-1)} - \frac{1}{4^{k-1} - 1} I_{(j, k-1)}.$$

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j = 1$	24.3891		22.3892	
$j = 2$		22.3912		
$j = 3$	22.5216			
$j = 4$	22.4223			

- c) [2 pts] A partir de la tabla, determine los errores relativos $\varepsilon_{j,k}$ respecto al valor exacto $N_{2,\text{exacto}} = 22.3890561$. Usar notación científica

$$\varepsilon_{j,k} = \left| \frac{N_{2,\text{exacto}} - I(j, k)}{N_{2,\text{exacto}}} \right|.$$

$\varepsilon_{1,1} =$		$\varepsilon_{2,1} =$	
$\varepsilon_{1,2} =$		$\varepsilon_{1,4} =$	

2. [11 pts] De acuerdo con la siguiente integral,

$$I = \int_1^5 (5 + e^{x/4}) dx, \quad I_{\text{exacta}} = 28.8253,$$

- a) [2 pts] Determine los nodos z_i y pesos c_i para la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos, a partir del polinomio de Legendre:

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \quad c_i = \frac{2}{(1 - z_i^2) [P_3'(z_i)]^2}.$$

- b) [2 pts] Realice el cambio de variable $x \mapsto z$ para obtener límites de integración entre -1 y 1 y determine la función $g(z)$ consistente con dichos límites.
- c) [4 pts] Aplique Cuadratura Gaussiana con 3 puntos y halle la aproximación integral.
- d) [3 pts] Determine una cota para el error cometido usando la expresión:

$$|E_G| \leq \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3) [(2n+2)!]^3} \max_{\xi \in [-1,1]} |g^{(2n+2)}(\xi)|,$$

donde $\xi \in (-1, 1)$ y recordando que para la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos se cumple $n+1 = 3$.

