

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 30 minutos

Fecha: 12 de junio de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borradores. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. [9 pts] En un ensayo de ventilación controlada, se registra la tasa instantánea $C = C(t)$ de acumulación de un contaminante en una cámara experimental. Durante el ensayo, en $t = 3$ horas se activa un segundo régimen de ventilación, por lo que la tasa de acumulación cambia de forma discontinua. La tasa se modela mediante

$$C(t) = \begin{cases} 2t + 3, & 1 \leq t \leq 3, \\ t^2 + 4 + 2e^{-(t-3)}, & 3 < t \leq 5. \end{cases}$$

La cantidad total acumulada del contaminante en el intervalo $1 \leq t \leq 5$ se expresa como

$$Q = \int_1^3 C_1(t) dt + \int_3^5 C_2(t) dt,$$

donde $C_1(t) = 2t + 3$ y $C_2(t) = t^2 + 4 + 2e^{-(t-3)}$.

- a) [2 pts] Escriba la expresión que se obtiene con el método de Trapecio compuesto respetando los dos tramos de integración, usando dos subintervalos en $[1, 3]$ y cuatro subintervalos en $[3, 5]$.

$Q_{\text{trap}} \approx$

$=$

Nota: En la primera casilla, dar la expresión en términos de C_1 y C_2 sin evaluar; en la segunda casilla, dar el valor numérico de la aproximación.

- b) [5 pts] Aplique Romberg únicamente al segundo tramo, y complete la tabla de Romberg con orden $k = 4$, es decir, error $\mathcal{O}(h^8)$.

$$I(j, k) = \frac{4^{k-1}}{4^{k-1} - 1} I_{(j+1, k-1)} - \frac{1}{4^{k-1} - 1} I_{(j, k-1)}.$$

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$
$j = 1$	44.2707		42.3960	
$j = 2$		42.3966		
$j = 3$	42.5152			
$j = 4$	42.4258			

- c) [2 pts] A partir de la tabla, determine los errores relativos $\varepsilon_{j,k}$ respecto al valor exacto $Q_{2,\text{exacto}} = 42.3960$. Usar notación científica

$$\varepsilon_{j,k} = \left| \frac{Q_{2,\text{exacto}} - I(j,k)}{Q_{2,\text{exacto}}} \right|.$$

$\varepsilon_{1,1}$	$=$		$\varepsilon_{2,1}$	$=$	
$\varepsilon_{1,2}$	$=$		$\varepsilon_{1,4}$	$=$	

2. [11 pts] De acuerdo con la siguiente integral,

$$I = \int_2^6 (4 + \sin x) dx, \quad I_{\text{exacta}} = 14.6237,$$

- a) [2 pts] Determine los nodos z_i y pesos c_i para la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos, a partir del polinomio de Legendre:

$$P_3(z) = \frac{1}{2}(5z^3 - 3z), \quad c_i = \frac{2}{(1 - z_i^2) [P'_3(z_i)]^2}.$$

- b) [2 pts] Realice el cambio de variable $x \mapsto z$ para obtener límites de integración entre -1 y 1 y determine la función $g(z)$ consistente con dichos límites.
- c) [4 pts] Aplique Cuadratura Gaussiana con 3 puntos y halle la aproximación integral.
- d) [3 pts] Determine una cota para el error cometido usando la expresión:

$$|E_G| \leq \frac{2^{2n+3} [(n+1)!]^4}{(2n+3) [(2n+2)!]^3} \max_{\xi \in [-1,1]} |g^{(2n+2)}(\xi)|,$$

donde $\xi \in (-1, 1)$ y recordando que para la cuadratura de Gauss-Legendre de 3 puntos se cumple $n+1 = 3$.

