

Código de alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones: Rellene sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros, **prohibido** hacer borrones, durante la evaluación no hay preguntas, trabaje con **4 decimales** (obligatorio), en caso de no colocar su código, tendrá calificación **0** sin lugar a reclamo. Revise ambas caras.

1. Consideremos los polinomios de Taylor de la función $f(x_0 + h)$, suponiendo que la función es al menos dos veces derivable:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(\xi)}{2!}h^2$$

Determine el error de truncamiento (o término de error) asociado a la fórmula de diferencia hacia adelante para $f'(x_0)$:

--

fórmula de diferencia hacia adelante tiene un error de orden:

--

2. Se quiere aproximar la integral:

$$I = \int_0^1 (x^5 + 2x + 1) dx$$

- a) Calcule $I(h_1)$ usando la regla del trapecio con $h_1 = 1$ (un solo subintervalo):

$$I(h_1) =$$

--

- b) Calcule $I(h_2)$ usando la regla del trapecio con $h_2 = 0.5$ (dos subintervalos):

$$I(h_2) =$$

--

c) El error de la regla del trapecio sigue la forma:

$$E(h) \approx -\frac{(b-a)}{12} h^2 f''(\xi)$$

Considerando que $f''(\xi)$ es aproximadamente constante en el intervalo:

Demuestre que:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

d) Partiendo de que el valor exacto satisface:

$$I = I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

y usando la relación anterior, **demuestre que** cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$, se obtiene:

$$I \approx \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

e) Halle el error al aproximar la integral utilizando el método de Romberg

$$I_R(O(h^4)) :$$

3. Se desea aproximar la integral $I = \int_1^4 \frac{4x}{1+x} dx$, usando la **fórmula compuesta de Simpson** con n subintervalos.

Para esta regla, el error de truncamiento está acotado por:

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|, \quad \text{con } h = \frac{b-a}{n}.$$

Para $f(x) = \frac{4x}{1+x}$ en el intervalo $[1, 4]$, se conoce que: $\max_{x \in [1,4]} |f^{(4)}(x)| \leq 3$.

Determina el **menor valor de n** que garantiza que el error de aproximación satisface: $|E_S| \leq 10^{-3}$.

Indicación: Utiliza la cota del error y no es necesario calcular el valor de la integral.