

Código de alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Instrucciones: Rellene sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros, **prohibido** hacer borrones, durante la evaluación no hay preguntas, trabaje con **4 decimales** (obligatorio), en caso de no colocar su código, tendrá calificación **0** sin lugar a reclamo. Revise ambas caras.

1. Consideremos los polinomios de Taylor de las funciones $f(x_0 + h)$ y $f(x_0 - h)$, suponiendo que la función es al menos tres veces derivable:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)}{2}h^2 + \frac{f'''(\xi)}{3!}h^3$$

$$f(x_0 - h) =$$

--

Determine el error de truncamiento (o término de error) asociado a la fórmula de diferencia centrada para $f'(x_0)$:

--

2. Se quiere aproximar la integral:

$$I = \int_0^1 e^x dx$$

- a) Calcule $I(h_1)$ usando la regla del trapecio con $h_1 = 1$ (un solo subintervalo):

$$I(h_1) =$$

--

- b) Calcule $I(h_2)$ usando la regla del trapecio con $h_2 = 0.5$ (dos subintervalos):

$$I(h_2) =$$

--

- c) El error de la regla del trapecio sigue la forma:

$$E(h) \approx -\frac{(b-a)}{12}h^2 f''(\xi)$$

Considerando que $f''(\xi)$ es aproximadamente constante en el intervalo:
Demuestre que:

$$\frac{E(h_1)}{E(h_2)} \approx \frac{h_1^2}{h_2^2}$$

d) Partiendo de que el valor exacto satisface:

$$I = I(h_1) + E(h_1) = I(h_2) + E(h_2)$$

y usando la relación anterior, **demuestre que** cuando $h_2 = \frac{h_1}{2}$, se obtiene:

$$I \approx \frac{4}{3}I(h_2) - \frac{1}{3}I(h_1)$$

e) En el método de Romberg, si la regla del trapecio tiene un error de orden $O(h^2)$, ¿qué orden de error se alcanza con la primera mejora o extrapolación (combinando dos aproximaciones)? :

3. Se desea aproximar la integral $I = \int_1^5 \frac{4x}{1+x} dx$, usando la **fórmula compuesta de Simpson** con n subintervalos.

Para esta regla, el error de truncamiento está acotado por:

$$|E_S| \leq \frac{b-a}{180} h^4 \max_{x \in [a,b]} |f^{(4)}(x)|, \quad \text{con} \quad h = \frac{b-a}{n}.$$

Para $f(x) = \frac{4x}{1+x}$ en el intervalo $[1, 5]$, se conoce que: $\max_{x \in [1,5]} |f^{(4)}(x)| \leq 3$.

Determina el **menor valor de n** que garantiza que el error de aproximación satisface: $|E_S| \leq 10^{-3}$.

Indicación: Utiliza la cota del error y no es necesario calcular el valor de la integral.