

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 30 minutos

Fecha: 29 de mayo de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borradores. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. En un laboratorio de instrumentación, se desea calibrar un sensor óptico usado para estimar la concentración de una sustancia en una solución. Para ello, se prepararon muestras con concentraciones conocidas C , medidas en mg/L, y se registró la respuesta del sensor V , medida en voltios. Los datos experimentales obtenidos fueron:

C_i (mg/L)	0	2	4	6	8	10
V_i (V)	0.08	0.55	0.65	1.30	1.38	1.95

Se desea aproximar la relación entre la concentración y la respuesta del sensor mediante el modelo lineal $V = a_1 C + a_0$.

- a) **(1 pto)** Escriba el sistema **sobre-determinado** asociado al modelo lineal $V = a_1 C + a_0$ en la forma $A\mathbf{x} \approx \mathbf{b}$, donde $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix}$,

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \square & 1 \\ \square & 1 \\ \square & 1 \\ 8 & 1 \\ \square & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 0.08 \\ 0.55 \\ 0.65 \\ 1.30 \\ 1.38 \\ 1.95 \end{bmatrix}$$

- b) **(1.5 pts)** Construya las matrices $A^T A$ y $A^T \mathbf{b}$ para luego plantear el sistema normal $A^T A \mathbf{x} = A^T \mathbf{b}$.

$$\begin{bmatrix} \boxed{} & \boxed{} \\ \boxed{} & \boxed{} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boxed{} \\ \boxed{} \end{bmatrix}$$

- c) **(1 pto)** Resuelva el sistema normal y escriba el modelo lineal ajustado de la forma $\hat{V}(C) = a_1 C + a_0$:

$$\hat{V}(C) = \boxed{}.$$

- d) **(3 ptos)** Complete la siguiente tabla usando el modelo ajustado:

C_i	V_i	$\hat{V}_i = a_1 C_i + a_0$	$e_i = V_i - \hat{V}_i$
0	0.08		
2	0.55		
4	0.65		
6	1.30		
8	1.38		
10	1.95		

- e) **(3 pts)** A partir de los resultados obtenidos en la tabla anterior, determine

$$S_r = \sum_{i=1}^n (V_i - \hat{V}_i)^2 =$$

$$S_t = \sum_{i=1}^n (V_i - \bar{V})^2 =$$

$$R^2 = 1 - \frac{S_r}{S_t} = \boxed{}$$

- f) **(0.5 pto)** Estime la respuesta del sensor para $C = 7 \text{ mg/L}$, es decir,

$$\hat{V}(7) = \boxed{}.$$

2. Un dron autónomo realiza una maniobra de descenso para aproximarse a una plataforma de aterrizaje. Durante la maniobra, se registra la altura $H(t)$, en metros, en distintos instantes de tiempo t , medidos en segundos. Los datos experimentales obtenidos son:

t_i	0	1.2	2.0	3.5	5.0
H_i	18.0	15.6	12.8	7.9	4.2

Se desea construir un spline cúbico natural $S(t)$ que interpole los datos registrados y permita aproximar la altura del dron durante toda la maniobra.

- a) **(2 puntos)** Determine las diferencias divididas de primer orden $H[t_i, t_{i+1}]$ y presente los resultados en una tabla de la forma: $i \mid t_i \mid H_i \mid h_i = t_{i+1} - t_i \mid H[t_i, t_{i+1}]$.
- b) **(3 puntos)** Plantee el sistema lineal que permita calcular M_1 , M_2 , y M_3 . Luego resuelva el sistema y determine los valores de M_0 , M_1 , M_2 , M_3 y M_4 .
- c) **(5 puntos)** Determine los coeficientes a_i , b_i , c_i y d_i para cada tramo y construya los polinomios cúbicos

$$S_i(t) = a_i(t - t_i)^3 + b_i(t - t_i)^2 + c_i(t - t_i) + d_i, \quad t \in [t_i, t_{i+1}].$$

Presente los resultados en una tabla: $S_i \mid a_i \mid b_i \mid c_i \mid d_i \mid [t_i, t_{i+1}]$.