

Código de Alumno:

Duración: 30 minutos

Fecha: 23 de abril de 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borrones. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. [8 pts] Se desea aproximar la raíz de la ecuación: $f(x) = \frac{\ln(\sqrt{x}) + 1}{6} - x + \sin(x) = 0$, en el intervalo $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$. Considere la siguiente reformulación equivalente en la forma de punto fijo $x = g(x)$:

$$g(x) = \sin(x) + \frac{\ln(\sqrt{x}) + 1}{6}$$

- a) [**3 pts**] Verifique si $g(x)$ cumple la condición de existencia: $x \in [a, b] \longrightarrow g(x) \in [a, b]$
- b) [**2 pts**] Considerando que $g(x)$ cumple la condición de contracción, para cualquier punto semilla $x_0 \in [a, b]$, entonces el método de punto fijo con la función $g(x)$ dada (converge / diverge / no se sabe). Nota: puntaje solo con resultado de (a).

- c) [**3 pts**] Efectúe 2 iteraciones del método de punto fijo usando un punto semilla $x_0 = \frac{2\pi}{7}$

This image shows a full page of blank graph paper. The grid consists of small, uniform squares formed by thin, light gray lines. The paper has a white background and is framed by a black border. There are no markings, text, or drawings on the grid.

2. [12 pts] Considere el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned}\sin(y^3) + x &= 2 \\ y^{-2} + y \cos(x) &= 4\end{aligned}$$

Complete lo siguiente considerando $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}^T$ y un punto semilla de $\mathbf{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 2 & 0.5 \end{bmatrix}^T$

a) [2 pts] Defina el vector función $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ tal que $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ y $\mathbf{F}(\mathbf{x}^{(0)}) = \begin{bmatrix} 0.1247 \\ -0.2081 \end{bmatrix}$:

$\mathbf{F}(\mathbf{x}) =$

b) [2 pts] Halle la matriz Jacobiana $J_F(\mathbf{x}) =$

c) [3 pts] Determine la primera aproximación utilizando el método de Newton con punto inicial $\mathbf{x}^{(0)}$:

d) [3 pts] Halle la segunda aproximación utilizando el método de Newton:

e) [2 pt] Determine el error relativo en la segunda iteración empleando la norma infinita $\|\cdot\|_\infty$: