

Código de Alumno:

--	--	--	--	--	--	--	--	--

Duración: 30 minutos

Fecha: 24 de abril del 2026

Instrucciones: Complete sus respuestas *únicamente* dentro de los recuadros. No se permiten borradores. Trabaje con **4 decimales** salvo indicación contraria. La falta del código de alumno implica una calificación de **0**. Revise **ambas caras** de la hoja. El uso de lápiz **anula el derecho a reclamo**. Se permite únicamente calculadora científica de dos líneas no programable, mas no de apuntes.

1. **(10 pts)** En un sistema mecánico con resorte no lineal, sea x el desplazamiento adimensional de equilibrio de una pequeña masa m . Debido a una corrección cúbica en la rigidez del elemento elástico, el equilibrio estático del sistema se modela mediante

$$F(x) = -2x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^3 = 0.$$

- a) **(2 pts)** Sin realizar iteraciones, justifique si el método de bisección es aplicable en el intervalo $[0; 0.5]$. Responda Si/No, “Justificación”

- b) **(2 pts)** Determine el número mínimo de iteraciones n necesarias del método de bisección para garantizar un error absoluto menor que 10^{-6} .

$$n = \boxed{}$$

Considere las siguientes expresiones para aplicar el método de punto fijo $x = g_1(x) = \frac{1}{x^2 + 4}$ y $x = g_2(x) = (1 - x^3)/4$.

- c) **(2 pts)** Determine si son contractivas en $[0; 0.5]$. Escribir en el recuadro derecho “*Si cumple/No cumple*”, según corresponda.

$$\begin{aligned} \max_{x \in [0; 0.5]} |g'_1(x)| &= \boxed{} \implies \boxed{} \\ \max_{x \in [0; 0.5]} |g'_2(x)| &= \boxed{} \implies \boxed{} \end{aligned}$$

- d) **(2 pts)** Considere el método de Newton-Raphson para $F(x) = 0$ y escriba explícitamente y simplifique la expresión de iteración, en terminos de x_n (no es necesario simplificar)

$$x_{n+1} =$$

- e) **(2 pts)** Aplique el método de Newton-Raphson con punto semilla $x_0 = 0.3$, determine x_2 y el error relativo $\delta_r^{(2)} = \frac{|x_2 - x_1|}{|x_2|}$

Respuesta: $x_2 =$ $\delta_r^{(2)} =$

2. **(10 pts)** En un sistema optoelectrónico con realimentación interna, sea A la amplitud adimensional de la señal en régimen estacionario y sea ϕ el desfase angular adimensional introducido por el circuito de control. Un modelo simplificado establece que la amplitud disminuye exponencialmente con el desfase, mientras que el desfase se ajusta según una respuesta trigonométrica de la amplitud. El equilibrio del sistema queda modelado por el sistema acoplado

$$\begin{cases} A = 1 + 0.2e^{-\phi}, \\ \phi = 0.5 + 0.3 \cos(A). \end{cases}$$

Se desea aplicar el método de punto fijo para este sistema no lineales, tomando como aproximación inicial

$$\mathbf{p}_0 = (A_0, \phi_0) = (1.2; 0.6).$$

Desarrolle de forma clara y ordenada los siguientes pasos en el espacio en blanco provisto:

- a) **(2 pts)** A partir del sistema de ecuaciones, defina el vector iterativo $\mathbf{G}_1(\mathbf{p}) = (u_1(A, \phi), v_1(A, \phi))$, tal que sus puntos fijos de la forma $\mathbf{p} = (A, \phi)$, sean soluciones del sistema de ecuaciones.
Observación: Denote por $\mathbf{G}_1$ al vector iterativo obtenido, de manera directa, del sistema de ecuaciones.
- b) **(3 pts)** Determine $\mathbf{p}_1 = \mathbf{G}_1(\mathbf{p}_0)$, $\mathbf{p}_2 = \mathbf{G}_1(\mathbf{p}_1)$ y obtenga los errores relativos para las dos primeras iteraciones, es decir $\delta_p^{(k)} = \frac{\|\mathbf{p}_k - \mathbf{p}_{k-1}\|_\infty}{\|\mathbf{p}_k\|_\infty}$, para $k = 1, 2$. A partir de los resultados obtenidos por $\delta_p^{(1)}$ y $\delta_p^{(2)}$, el error relativo, ¿disminuye o aumenta?
- c) **(2 pts)** Verifique que, en el dominio adecuado, los puntos fijos de

$$\mathbf{G}_2 = \begin{pmatrix} \arccos\left(\frac{\phi - 0.5}{0.3}\right) \\ -\ln\left(\frac{A - 1}{0.2}\right) \end{pmatrix}$$

corresponden a soluciones del sistema.

- d) **(3 pts)** Determine $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{G}_2(\mathbf{p}_0)$ y determine el error relativo para la primera iteración.

